

Studium brył foremnych i pochodnych

—

Sylwester Michalczewski

Studium brył foremnych i pochodnych —

Sylwester Michalczewski

Kraków 2021

Podziękowania:

dla pani Dziekan prof. Marii Dziedzic za zielone światło

dla tego przedsięwzięcia,

dla pani dr hab. Anny Myczkowskiej-Szczerskiej za życzliwość,

cenne rady praktyczne oraz wsparcie duchowe,

dla pani dr hab. Anny Szwai za projekt graficzny i przygotowanie do druku,

dla pana dr. hab. Piotra Witośławskiego za fotografie wszystkich obiektów

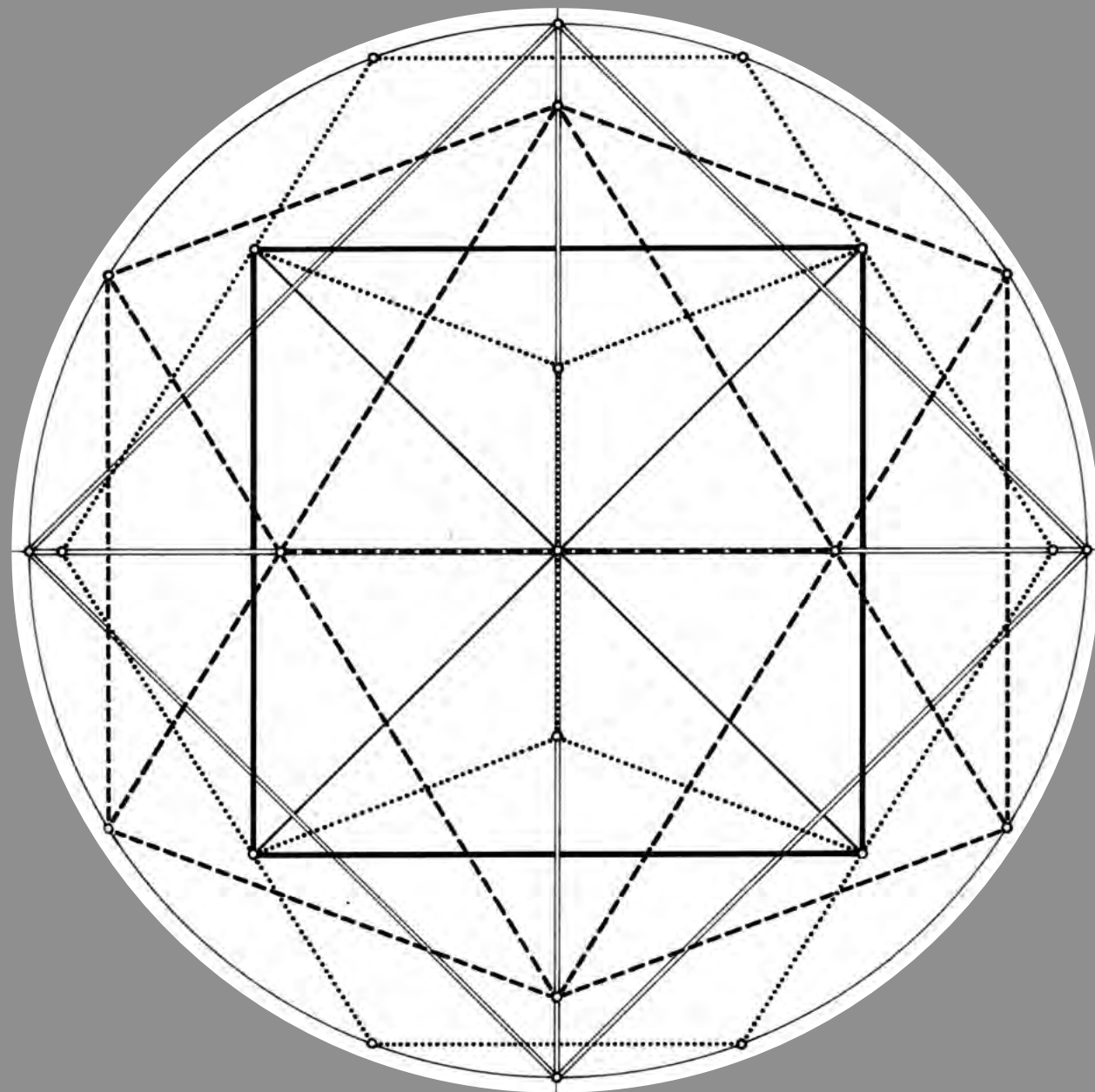
przestrzennych,

dla pana Jacka Brzuchacza za skany rysunków,

dla mojego syna Sylwestra Juniora za pierwsze korekty tekstu.

Pamięci Barbary Gołajewskiej-Chudzikiewicz,

która rozbudziła moje zainteresowanie geometrią stosowaną



Rys. V. Pięć brył foremnych
wpisanych w jedną sferę:

- linia gruba – HEKSAEDR wpisany
w D
- linia średnia – TETRAEDR
- linia cienka podwójna –
OKTAEDR
- linia kropkowana – DODEKAEDR
- linia przerywana – IKOSAEDR

Spis treści

Wstęp / 9

I Grupa Heksaedru / 12

- 1 Tetraedr / 15
- 2 Heksaedr / 23
- 3 Oktaedr / 31
- 4 Dwunastościan
rombowy / 39

II Grupa Heksaedru / 48

- 5 Tetraedr ścięty / 51
- 6 Heksaedr ścięty / 59
- 7 Oktaedr ścięty / 67

III Grupa Dodekaedru / 74

- 8 Dodekaedr / 77
- 9 Ikosaedr / 85
- 10 Trzydziestościan
rombowy / 93

IV Grupa Dodekaedru / 100

- 11 Dodekaedr ścięty / 103
- 12 Ikosaedr ścięty / 109

Tabela zbiorcza / 114

Graf zbiorczy / 116

Podsumowanie / 117

Abstrakt /118

Opisy rysunków / 119

Opisy fotografii / 121

Opisy fotografii
dodatkowych / 123

Bibliografia / 124

O autorze / 125

Wstęp

„W kryształach danej substancji wielkość ścian nie jest stała, natomiast kąty między ścianami lub między krawędziami są stałe we wszystkich kryształach danego rodzaju. Innymi słowy, postać zewnętrzna może być różna dla różnych kryształów, zależnie od warunków krystalizacji, występują jednak zawsze jednakowe kąty między ścianami”.

Prawo stałości kątów¹

Jako projektant wzornictwa przemysłowego zawsze doceniałem znaczenie geometrii w tym zawodzie. A jako nauczyciel akademicki prowadzący zajęcia z projektowania trójwymiarowego staram się zainteresować moich studentów stereometrią. Dlatego pierwsze ćwiczenia, a następnie zadania projektowe, dotyczą obiektów abstrakcyjnych, a nie konkretnych obiektów użytkowych. Działania praktyczne na bryłach nie tylko rozwijają wyobraźnię, ale przede wszystkim usprawniają proces twórczego rozwiązywania problemów. Te abstrakcyjne obiekty wymagają od nas uważności, precyzji wykonania i cierpliwości, a nie tolerują ignorowania potrzebnej do tego wiedzy, ani niedbałego czy też pośpiesznego wykonania. Jednym słowem uczą nas pokory. Nas – artystów plastyków, projektantów wzornictwa, a także architektów, bardziej interesuje morfologia (forma), a mniej struktura. Wszyscy wiemy, że bryły są interesujące i niezwykle. Ale tylko dla niektórych z nas są fascynujące, urzekają swoją naturalną prostotą, regularnością i pięknem. Niestety, poznawanie ich najczęściej kończymy na własnościach zewnętrznych, figurach ścian, liczbie ścian, krawędzi

i wierzchołków oraz postrzeganiu niektórych zależności między tymi własnościami. Praktyczne doświadczenia na bryłach najczęściej kończymy na modelach klejonych z siatek płaskich. To zdecydowanie za mało, aby je naprawdę poznać i zrozumieć jak one mogą organizować przestrzeń. W niniejszym studium chciałbym zwrócić uwagę na ich budowę wewnętrzną, odkryć kąty determinujące ich postać zewnętrzną. Zająć się praktycznie ich bryłowością, szukać sposobów realizacji monolitów brył z litych materiałów, dzielić monolity na równe części, łączyć części w nowe konfiguracje, przekształcać jedno w drugie i deformować je według określonych reguł. Ponadto chciałbym usystematyzować rozrzuconą po licznych opracowaniach wiedzę w interesującym mnie zakresie i uporządkować terminologię. Odkrycie wielościanów foremnych i półforemnych zawdzięczamy starożytnym matematykom (filozofom) greckim. To Euklides stwierdził, że istnieje tylko 5 brył foremnych², a odkrycie brył półforemnych przypisuje się Arystotelesowi³. Obiekty te należą do dziedzictwa myśli starożytnej

¹ Krystalografia i chemia strukturalna – str. 302

² *Bóg i geometria* – str. 76

³ *Galeria wielościanów* – str. 58

Grecji, które przejęła i rozwinęła cywilizacja łacińska⁴. Szczególne zasługi dla rozwoju wiedzy na tym polu ma krystalografia. Zamieszczony na wstępie cytat zaczerpnięty z opracowania *Krystalografia i chemia strukturalna* stał się moją bezpośrednią inspiracją do zajęcia się tematem. Jednakże prawdziwym wyzwaniem stała się dla mnie konstatacja autorów tego opracowania zawarta w części trzeciej pt. „Morfologia kryształów” na str. 344: „Fundamentalne badania morfologiczne, które stworzyły podstawy krystalografii straciły obecnie wiele ze swego znaczenia w związku z tym, że posługując się rentgenowską analizą strukturalną można znacznie łatwiej uzyskać informacje dotyczące symetrii i określić bezwzględne własności parametrów sieci. Już tylko bardzo niewielu badaczy zajmuje się poszukiwaniem ścisłej zależności między strukturą a morfologią kryształów”.

W swoim opracowaniu, ze względu na szacunek dla tradycji, będę stosował nazwy greckie, a nazwy polskie jako uzupełniające. Zastosowane skróty literowe (wprowadzone na potrzeby tego opracowania symbole nazw greckich) służą zmniejszeniu rozwlekłości tekstu. W nazewnictwie polskim wprowadzam pewne, moim zdaniem konieczne, korekty. Nową nazwę otrzymuje Oktaedr ścięty – *Ośmiosześcian*, przez analogię do *Sześcioośmiościan* – tj. Heksaedr ścięty. Dodekaedr ścięty, który obecnie nosi nazwę *Dwudziestodwunastościan* przyjmie określenie *Dwunastodwudziestościan*, natomiast Ikosaedr ścięty przyjmie nazwę *Dwudziestodwunastościan*. Dodatkowo wprowadzam specjalnie opracowane znaki

4 *Historia wiedzy* – Rozdział 2

dla wszystkich wybranych brył w celu graficznej identyfikacji każdej z nich. Znak składa się z figury ściany, na której umieszczona jest liczba takich ścian. Figurami tymi będą: trójkąt równoboczny, kwadrat, romb, pięciobok foremny i sześciobok foremny. W przypadku pięciu brył pochodnych będą stosowane dwie różne figury z odpowiednimi liczbami ścian. W opisie budowy wewnętrznej brył wprowadzam określenia:

- kąt środkowy – między parą prostych lub półprostych wychodzących ze środka bryły i wyznaczających położenie wierzchołków;
- kąt krawędziowy – między krawędzią bryły a przekątną bryły lub pół prostą łączącą wierzchołek ze środkiem bryły.

W opisie podziału brył na równe części wprowadzam określenia:

- podział ortogonalny – to znaczy prostopadle do podstawy przez środek bryły;
- podział skośny – pod określonym kątem do podstawy przez środek bryły;
- podział strukturalny – wzdłuż wszystkich krawędzi dośrodkowo.

Studium obejmuje 12 wybranych wielościanów: 5 brył foremnych oraz 7 brył pochodnych od foremnych. Definicje wielościanów można znaleźć w wielu źródłach⁵. Bryły zostały podzielone na dwie grupy:

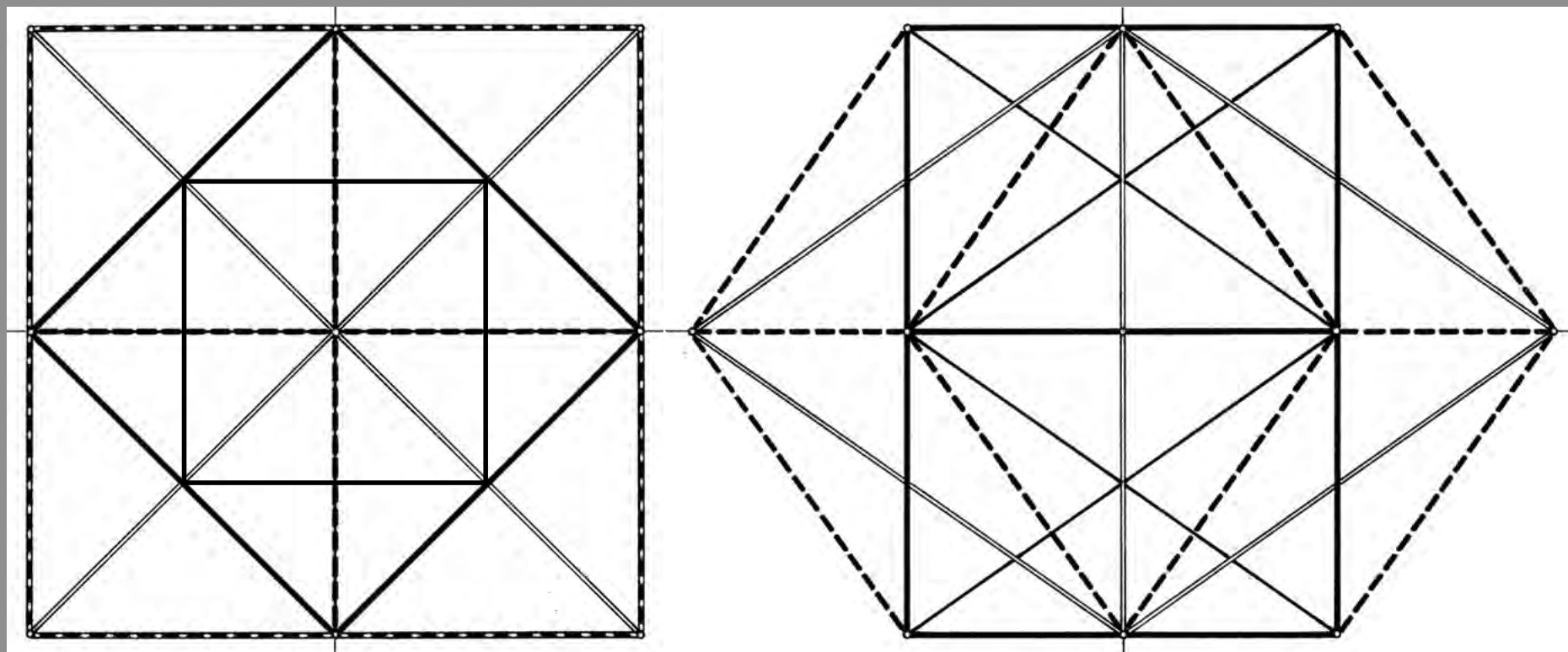
- grupa Heksaedru – do której należą: Tetraedr (T), Heksaedr (H), Oktaedr (O) oraz Dwunastościan rombowy $\boxplus$ (rys. I);

5 *Geometria pogładowa* – str. 87-91, *Galeria wielościanów* – str. 27-40 i 58-81, *Encyklopedia Szkolna* – str. 313-321, *Kalejdoskop matematyczny* – str. 186-208, *Podręcznik geometrii wykreslonej* – §14, od str. 118

- grupa Dodekaedru – do której należą: Dodekaedr (D), Ikosaedr (I), oraz Trzydziestościan rombowy $\boxplus$ (rys. III)

Pozostałe bryły pochodne należące do obu grup powstają przez ścinanie naroży brył foremnych. Zatem w grupie H znajdują się 3 bryły: Tetraedr ścięty (T/T), Heksaedr ścięty (H/O) i Oktaedr ścięty (O/H) (rys. II), a w grupie D znajdują się dwie bryły: Dodekaedr ścięty (D/I) oraz Ikosaedr ścięty (I/D) (rys. IV). Podsumowaniem moich badań będzie tabela zbiorcza własności brył zawierająca miary katowe. W Tabeli bryły zostały ułożone w tej samej kolejności od 1 do 12, co w opisie studium. Tabela umożliwia porównywanie własności oraz ujawnia interesujące związki katowe między

bryłami. Bezpośrednio za tabelą znajduje się Graf zbiorczy, będący wizualizacją podziału brył na grupy oraz powiązań między bryłami. Graf ujawnia symetrię związków pomiędzy bryłami w obu grupach. Uzupełnieniem studium będzie graficzne przedstawienie uporządkowanego układu szkieletów zewnętrznych pięciu brył foremnych wpisanych w jedną sferę, w którym pary brył wzajemnie dualnych przenikają się a Heksaedr jest wpisany w Dodekaedr. W układzie tym krawędzie drugiego planu pokrywają się z krawędziami pierwszego planu (rys. V). Dodatkiem specjalnym będzie fotografia fizycznych modeli brył foremnych, wykonanych w jednolity sposób z prętów drewnianych o przekroju prostokątnym (fot. 02).

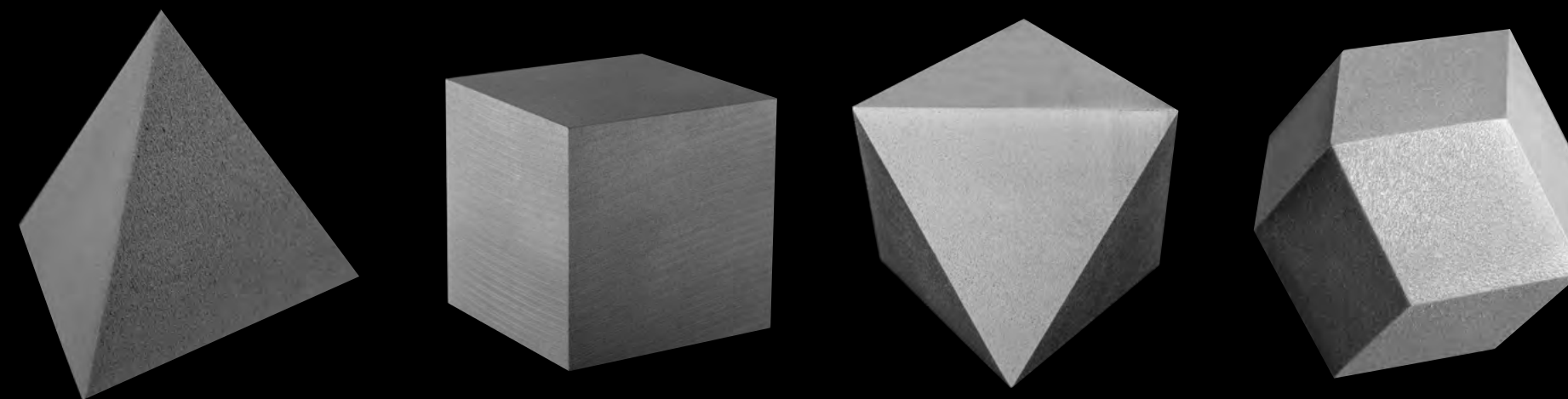


Rys. I. GRUPA HEKSAEDRU; 3 bryły
foremne: T, H, O + Φ półforemna

- linia gruba – HEKSAEDR o krawędzi a
- linia średnia – 2 przenikające się TETRAEDRY o krawędzi $a\sqrt{2}$
- linia cienka podwójna – OKTAEDR o krawędzi $a\sqrt{2}$
- linia przerywana – DWUNASTOŚCIAN ROMBOWY o przekątnych rombu a i $a\sqrt{2}$

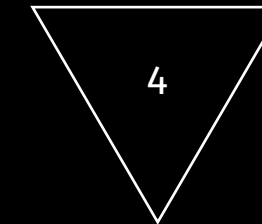
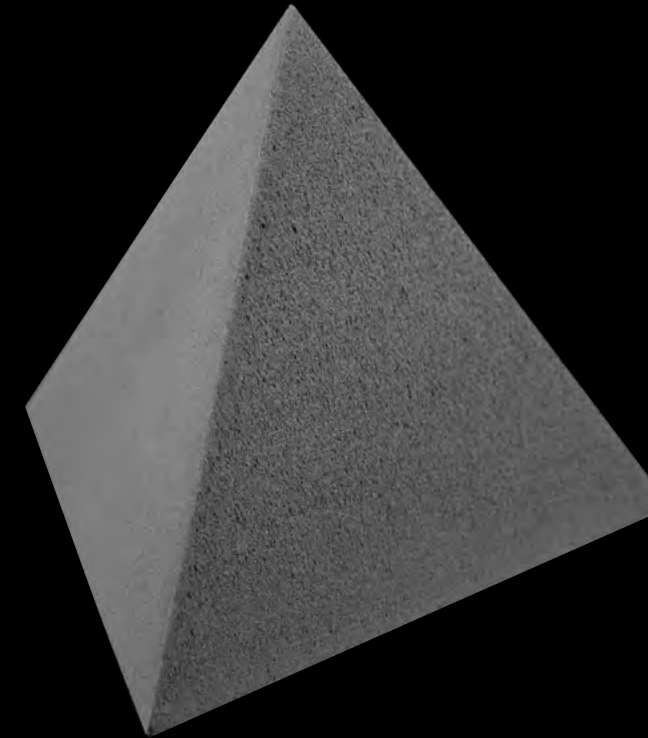
I GRUPA HEKSA- EDRU

T H O Φ



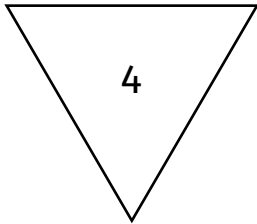
1

TETRAEDR T
Czworościan
foremny



TETRAEDR T

Czworościan foremny



Szczególny przypadek ostrosłupa o podstawie trójkątnej, w którym wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi. Bryła elementarna o najmniejszej liczbie ścian i wierzchołków, ale, paradoksalnie, jej percepcja nie jest wcale prosta. Bryła zwarta i mocna konstrukcyjnie, agresywna, o ostrych krawędziach i bardzo ostrych narożach. Zapadnięta w sobie, o najmniejszej objętości w stosunku do pola powierzchni. Jedyna bryła nieposiadająca przekątnej.

Szkielet wewnętrzny T tworzą dwie pary półprostych wychodzących ze środka pod kątem $109^{\circ}28'$, a leżących na dwóch płaszczyznach wzajemnie prostopadłych. Dowolna powierzchnia sferyczna o wspólnym środku z bryłą przetnie te półproste wyznaczając położenie przestrzenne wierzchołków T (rys. 1.1).

Szkielet zewnętrzny T tworzą 4 wierzchołki połączone sześcioma krawędziami. W każdym wierzchołku zbiegają się 3 krawędzie pod kątem $35^{\circ}16'$ w stosunku do półprostej wychodzącej ze środka bryły. Krawędzie układają się w 3 pary wzajemnie prostopadłe. Kąt dwuścienny wynosi $70^{\circ}32'$ ($2 \times 35^{\circ}16'$).

Szkielet wewnętrzny T jest połową szkieletu wewnętrznego Heksaedru, ponieważ wykorzystuje tylko 4 spośród 8 wierzchołków H. Pozostałe 4 wierzchołki można połączyć krawędziami drugiego T. 2 przenikające się Tetraedry tworzą gwiazdę ośmioramienną, w której centrum zawarty jest Oktaedr. Dlatego można ją nazwać Oktaedrem gwiazdzistym, *stella octangula*⁶ (rys. I).

Kontur T w trzech charakterystycznych rzutach przybiera kształt trójkąta równobocznego i kwadratu (rys. 1.2 a, b, c).

Tetraedr jest bryłą dualną do siebie samej, ponieważ posiada taką samą liczbę ścian i wierzchołków, a kąt krawędziowy T jest równy połowie jego kąta dwuściennego ($\rightarrow$ Tabela zbiorcza).

Monolit T można wykonać z H wyznaczając na jego przeciwległych ścianach po jednej przekątnej ułożonych wzajemnie prostopadle. Wykonujemy 4 cięcia naroży H wzdłuż wyznaczonych przekątnych pod kątem $54^{\circ}44'$. Ścięte naroża H można wykorzystać do budowy Oktaedru, ponieważ są to ósme części O. Inny sposób realizacji monolitu T polega na ścinaniu graniastosłupa o podstawie trójkąta równobocznego. Wysokość graniastosłupa wyznaczamy trójkątem prostokątnym z kątem $54^{\circ}44'$, w którym przeciwprostokątna będzie krawędzią T, a dłuższa przyprostokątna szukaną wysokością. Wykonujemy 3 cięcia wzdłuż boków podstawy pod kątem $70^{\circ}32'$.

T posiada szczególną własność pochodną od własności trójkąta, dzięki której możliwe jest zmniejszanie wymiarów całej bryły ścinając tylko jedną ścianę równolegle. Heksaedr wymaga trzech takich operacji.

Ortogonalny podział T wzdłuż jednej krawędzi dzieli całość na dwie równe części (fot. 1.2). Podział wzdłuż dwóch krawędzi dzieli całość na 4 równe części, które są czterościanami o postaci klinów (fot. 1.2). Podział wzdłuż trzech krawędzi nie daje równych części.

Skośny podział T kątem $54^{\circ}44'$ jedną płaszczyzną przechodzącą przez środki czterech krawędzi dzieli całość na dwie równe części. Kształt przekroju jest tu kwadratem, co pozwala na przekształcenie T przez obrót jednej części o 90° w nową bryłę wypukło-wklęsłą – bliźniak T (fot. 1.3, 1.4). Skośny podział dwiema płaszczyznami dzieli bryłę na 4 równe części. Są to dziwne twory pięciościenne, przechylone ostrosłupy rombowe, które składają się z dwóch ostrosłupów – jeden jest

Tetraedrem, a drugi $\frac{1}{4}$ Oktaedru. Nasza wyobraźnia jest tutaj wystawiona na poważną próbę, więc możemy mieć problem z ponownym złożeniem takich części w całość (fot. 1.5). Z części takich można składać nowe interesujące bryły (fot. 1.6).

Strukturalny podział T rozbija bryłę na 4 ostrosłupy trójkątne o kątach $35^{\circ}16'$ przy podstawie i 120° między ścianami bocznymi. Dwie takie jednostki strukturalne połączone ścianami bocznymi tworzą $\frac{1}{2}$ T (fot. 1.7). Dwie jednostki strukturalne połączone podstawami tworzą nową

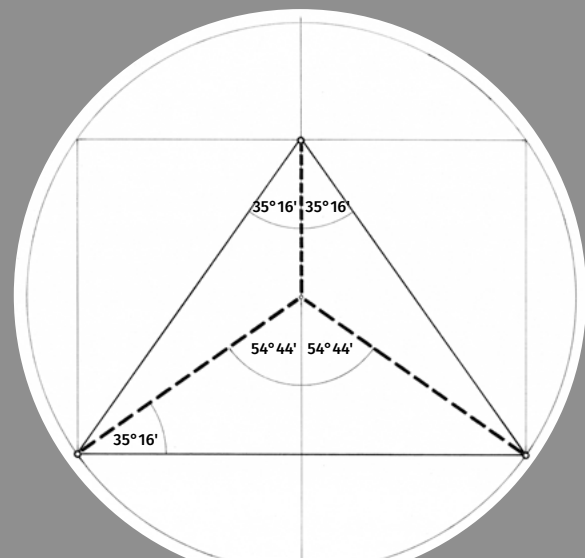
interesującą bryłę – sześciścian o jednorodnych ścianach trójkątnych i różnych kątach dwuściennych: $70^{\circ}32'$ oraz 120° .

Z monolitu T można uzyskać 4 mniejsze T ścinając jego naroża równolegle do przeciwległej ściany przez środki krawędzi. Po ścięciu czterech naroży pozostanie centralny trzon bryły w postaci małego Oktaedru. Jeśli do każdej ściany T dodamy jednostkę strukturalną T, powstanie Tetraedr potrójny⁷ (fot. 1.8). Jeśli zaś do każdej ściany T dodamy tej samej wielkości T, powstanie gwiazda czteroramienna (fot. 1.9).

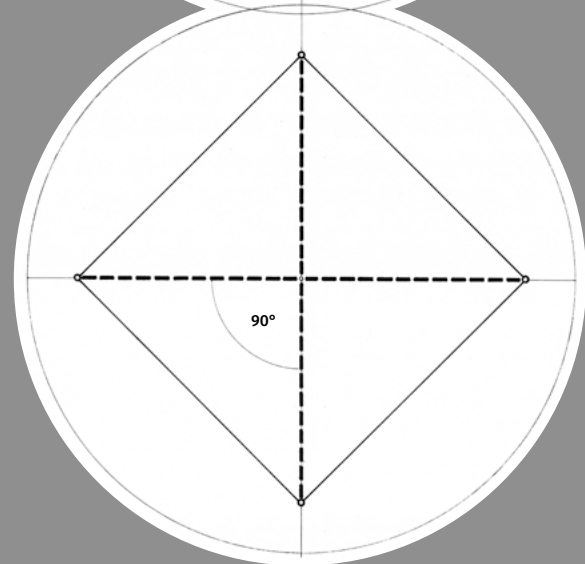
⁶ Galeria wielościanów – str. 44

⁷ Galeria wielościanów – str. 85

a

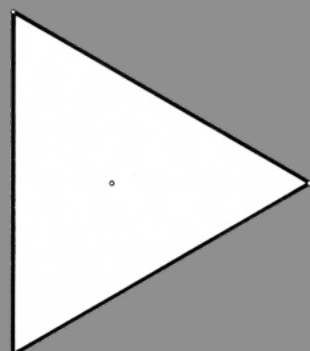


b

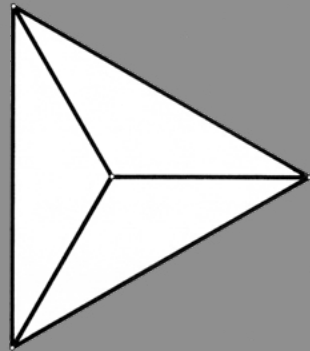


Rys. 1.1 TETRAEDR, szkielet wewnętrzny z kątami w dwóch rzutach.

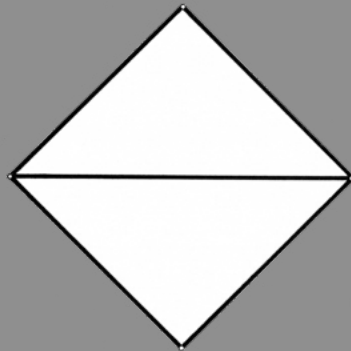
a



b

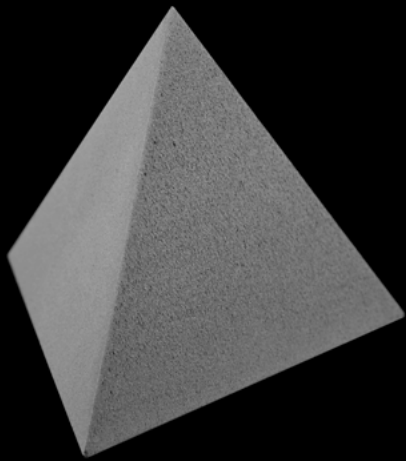


c

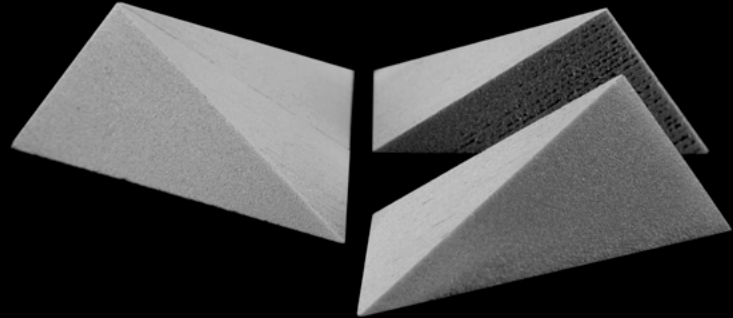


Rys. 1.2 TETRAEDR, szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony wierzchołka c) od strony krawędzi.

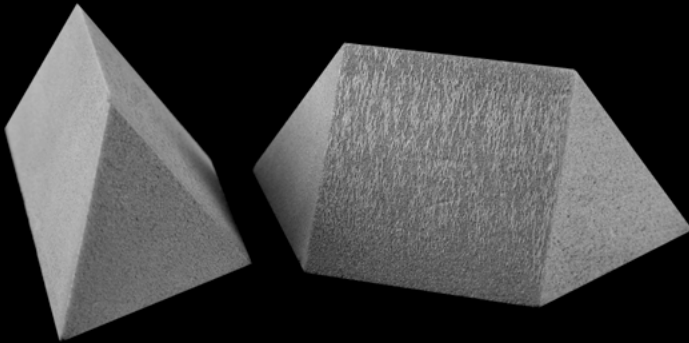
fot. 1.1



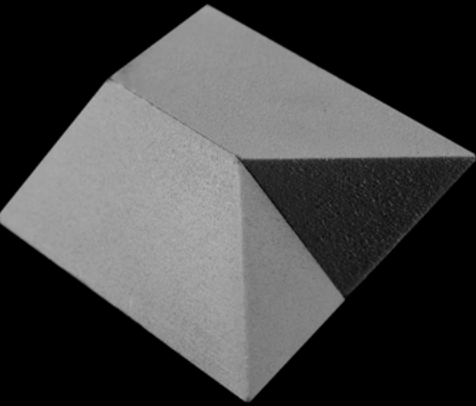
fot. 1.2

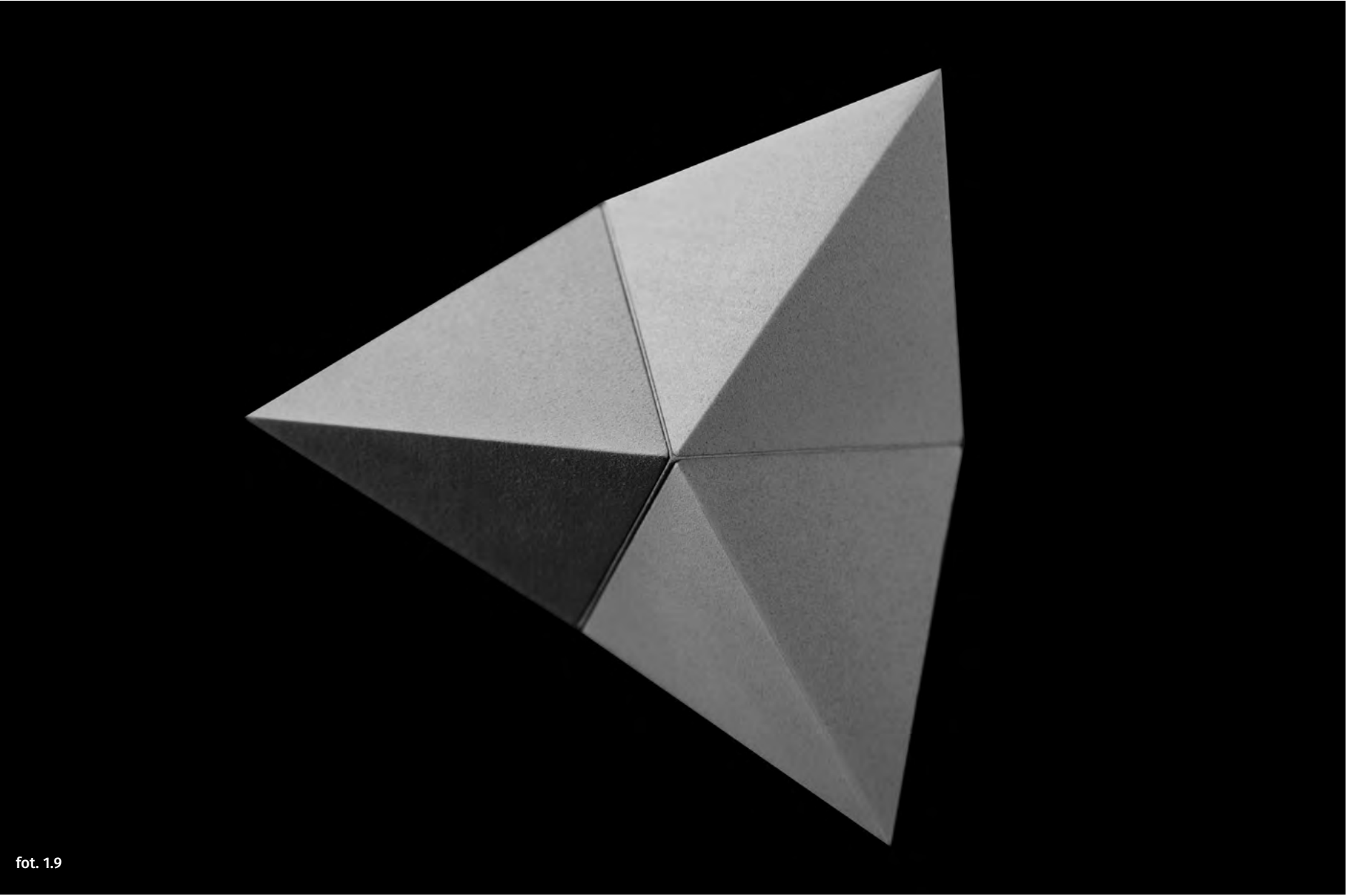
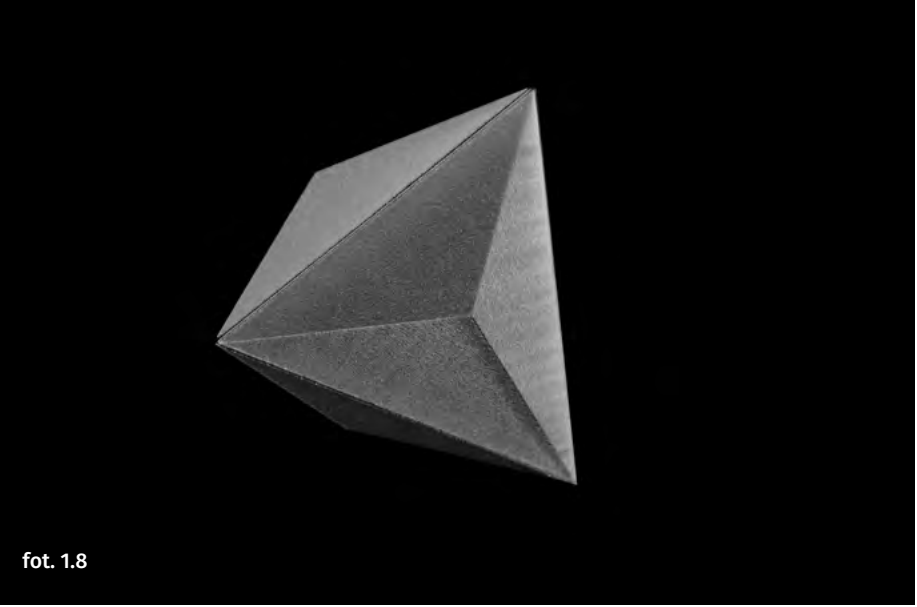
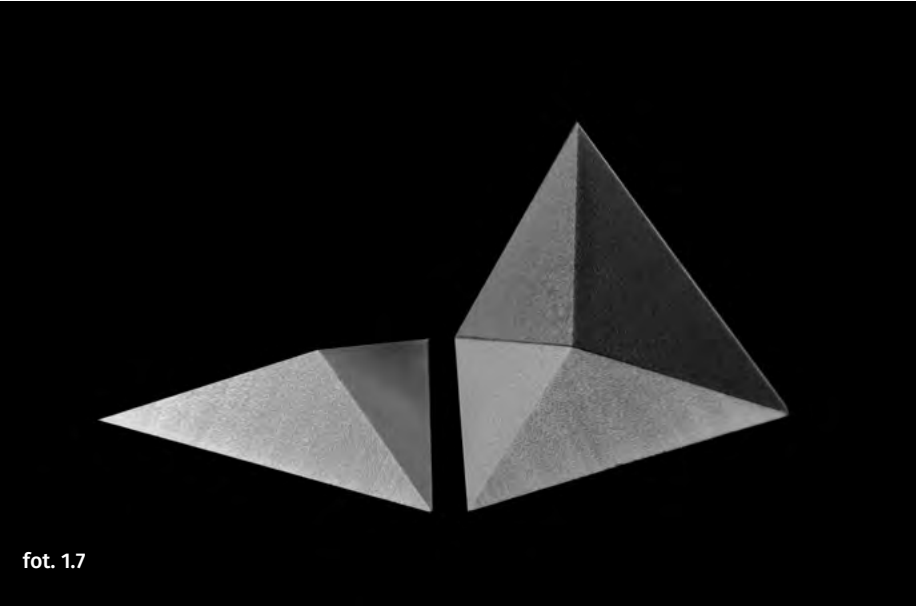
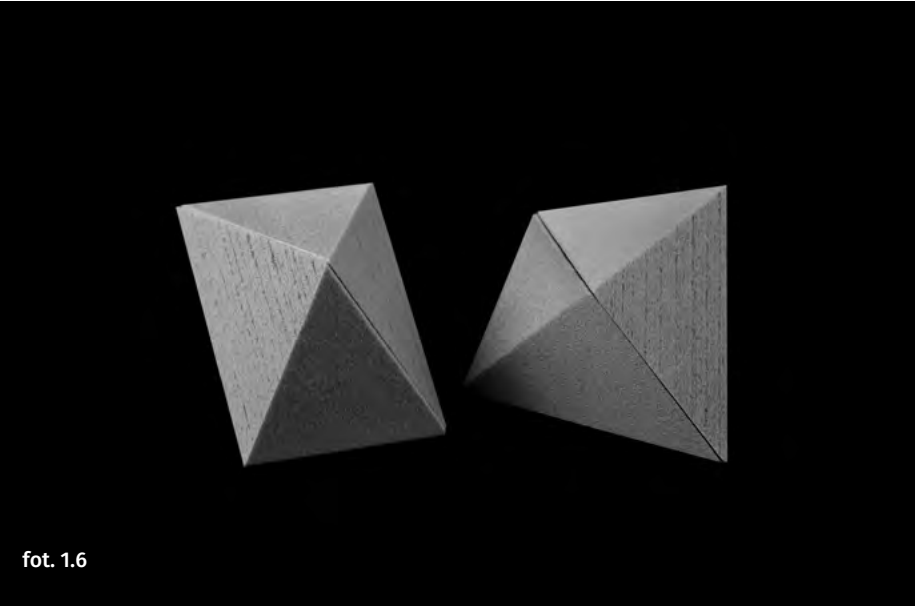
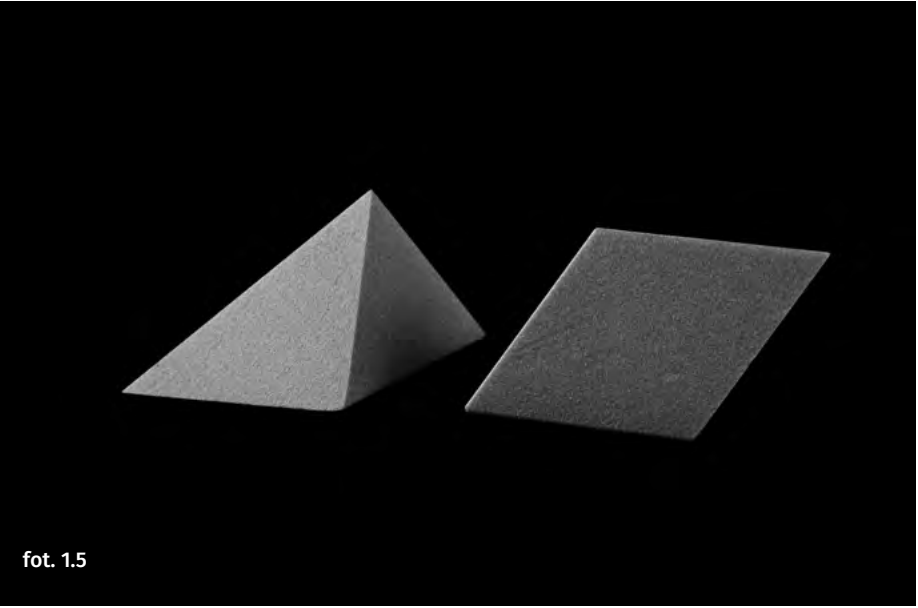


fot. 1.3



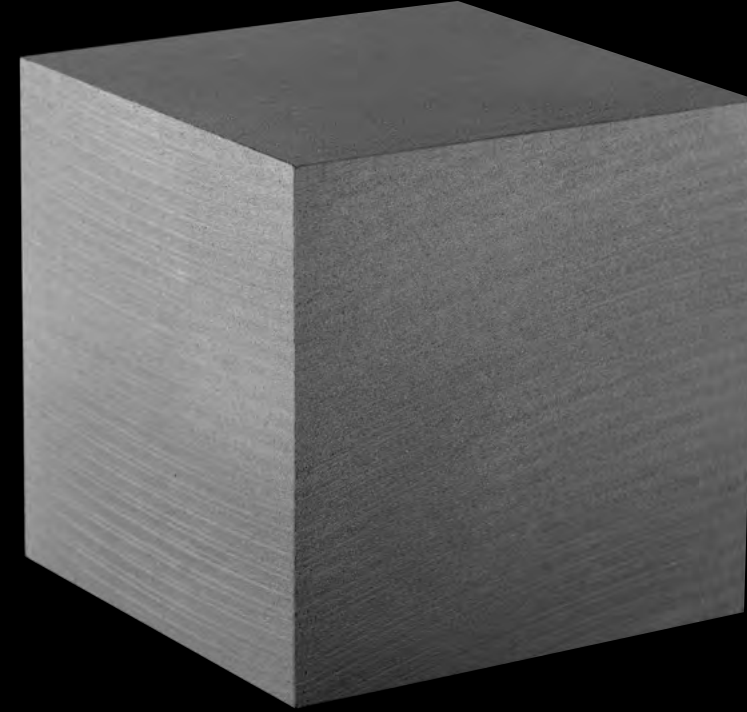
fot. 1.4





2

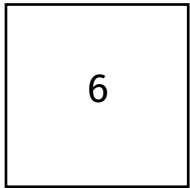
HEKSAEDR H
Sześćcian



6

HEKSAEDR H

Sześćcian



Szczególny przypadek prostopadłościanu, w którym wszystkie ściany są kwadratami. Bryła najprostsza w percepcji, zrównoważona, solidna, neutralna. Jednostka objętości i podstawowa jednostka przestrzeni w architekturze. Bryła-matka, z której można wykonać wszystkie pozostałe bryły foremne i pochodne. Bryła najprostsza do wykonania, ze względu na kąty proste oraz jeden wymiar powtórzony 3 razy. Jednak jak się okaże, budowa wewnętrzna H nie będzie już tak prosta jak jej postać zewnętrzna.

Szkielet wewnętrzny H tworzą dwie pary prostych przecinających się w środku bryły pod kątem $70^{\circ}32'$ a leżących na dwóch płaszczyznach wzajemnie prostopadłych. Dowolna powierzchnia sferyczna o środku wspólnym z bryłą, przetnie te 4 proste wyznaczając położenie przestrzenne wierzchołków H (rys. 2.1).

Szkielet zewnętrzny H tworzy 8 wierzchołków połączonych dwunastoma krawędziami. W każdym wierzchołku zbiegają się 3 krawędzie pod kątem $54^{\circ}44'$ w stosunku do przekątnej bryły. Przeciwległe krawędzie układają się w 6 par wzajemnie równoległych. Przeciwległe ściany układają się w 3 pary wzajemnie równoległe. Kąt dwuścienny wynosi 90° ($2 \times 45^{\circ}$). Każda ściana styka się z czterema sąsiednimi.

Kontur H w trzech charakterystycznych rzutach przybiera kształt kwadratu, prostokąta i sześcioboku foremnego (rys. 2.2 a, b, c).

Heksaedr jest bryłą dualną do Oktaedru i odwrotnie. Jego 8 wierzchołków może stykać się ze środkami ścian O opisanego na H, a kąt krawędziowy H jest równy połowie kąta dwuściennego O ($\rightarrow$ Tabela zbiorcza).

H można dzielić na równe części na wiele sposobów. Najbardziej naturalnym i zarazem najprostszym w realizacji jest ortogonalny podział trzema płaszczyznami połowiącymi krawędzie bryły. Po jednym

cięciu otrzymujemy dwie połowy, po 2 cięciach 4 ćwiartki, a po 3 cięciach 8 małych Heksaedrów (fot. 2.2). Gdybyśmy przecinali każdą krawędź H dwukrotnie dzieląc ją na 3 równe części, uzyskalibyśmy 27 jeszcze mniejszych Heksaedrów. Gdybyśmy przecinali każdą krawędź trzykrotnie dzieląc ją na 4 równe części, uzyskalibyśmy 64 jeszcze mniejsze Heksaedry itd.

Inny ortogonalny podział H polega na połowieniu ścian wzdłuż przekątnej ściany. Po trzech cięciach uzyskujemy 6 czterościanów o postaci klinów. Powtórne złożenie bryły z takich części nie będzie oczywiste (fot. 2.3). Z dwóch takich części można złożyć $\frac{1}{2}$ H o postaci przechylonego ostrosłupa kwadratowego. Z trzech części składamy $\frac{1}{2}$ H, a z czterech można składać wiele nowych, interesujących brył m.in.: czterościany, sześciściany, dziwaczne ośmiościany.

Szczególnie interesujący jest skośny podział H kątem $54^{\circ}44'$ przez środki krawędzi na dwie równe części. Przekrój ma tu kształt sześcioboku foremnego, dzięki czemu możliwe staje się przekształcenie bryły przez obrót jednej części o 60° . Powstaje nowa bryła wypukło-wklęsła, która w krystalografii występuje pod nazwą bliźniak albo zrost⁸ (fot. 2.4, 2.5). Jeszcze inny podział H kątem $35^{\circ}16'$ wzdłuż przekątnej bryły daje przekrój w kształcie rombu. Po obrocie jednej części o 180° powstanie inny bliźniak (fot. 2.6, 2.7). Nowe 3 bryły powstaną także po złączeniu obu części ścianami kwadratowymi i przekręcaniu jednej części o 90° .

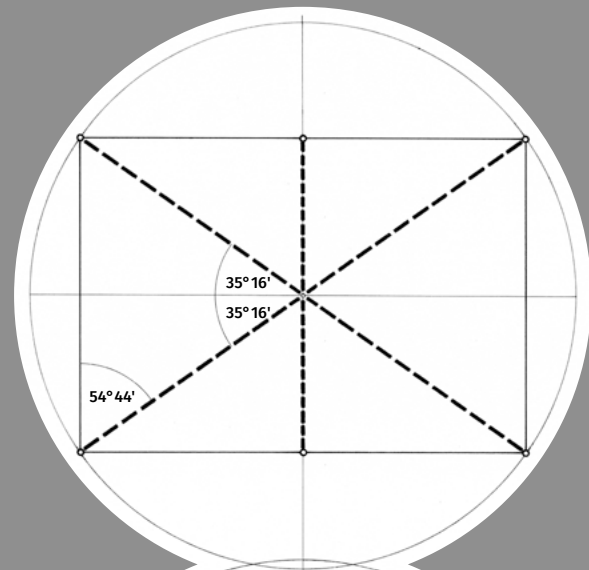
Strukturalny podział H nie będzie prosty w realizacji, ponieważ przecina się przy tym sąsiednie ściany po przekątnych. Dlatego łatwiej będzie

wykonać 6 graniastosłupów kwadratowych o wysokości $\frac{1}{2}$ boku kwadratu i pościnać je wzdłuż boków podstawy kątem 45° . W ten sposób uzyskujemy 6 jednostek strukturalnych H. Jednostka taka jest ostrosłupem kwadratowym o kącie 45° przy podstawie i 120° między ścianami bocznymi. Łącząc dwie jednostki ścianami bocznymi uzyskujemy $\frac{1}{3}$ strukturalną H, a łącząc 3 jednostki, co jest możliwe na 2 sposoby, otrzymamy $\frac{1}{2}$ H (fot. 2.8, 2.9). Po przecięciu prostopadłym jednostki strukturalnej H wzdłuż przekątnej jej podstawy i złożeniu połówkami podstawy, otrzymamy nowy ostrosłup o podstawie rombu o kątach

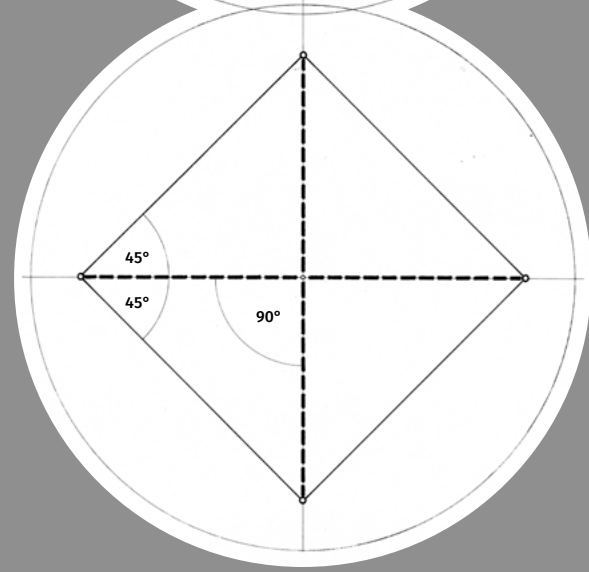
$72^{\circ}32'$ i $109^{\circ}28'$. Będzie to $\frac{1}{12}$ część strukturalna Dwunastościanu rombowego $\mathfrak{H}$ (fot. 2.10). Porównaj z fot. 4.8. Łącząc dwie jednostki strukturalne H kwadratowymi podstawami otrzymujemy nową bryłę ośmiościenną o jednorodnych ścianach trójkątnych i różnych kątach dwuściennych 90° i 120° (fot. 2.11). Z sześciu takich brył można zbudować Dwunastościan rombowy $\mathfrak{H}$.

Jeśli do każdej ściany H dodamy jednostkę strukturalną H, powstanie Dwunastościan rombowy, ponieważ ściany boczne dodanych ostrosłupów tworzą jedną płaszczyznę (fot. 2.12).

a

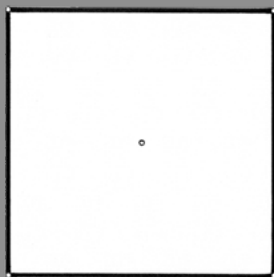


b

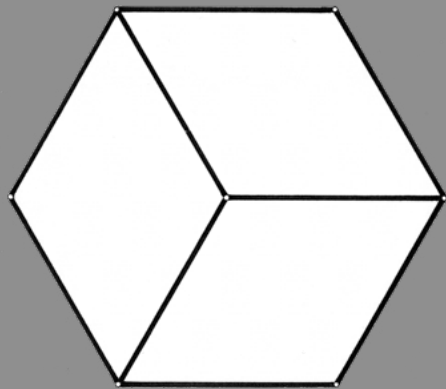


Rys. 2.1 HEKSAEDR, szkielet wewnętrzny z kątami w dwóch rzutach.

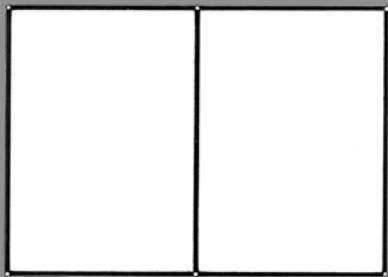
a



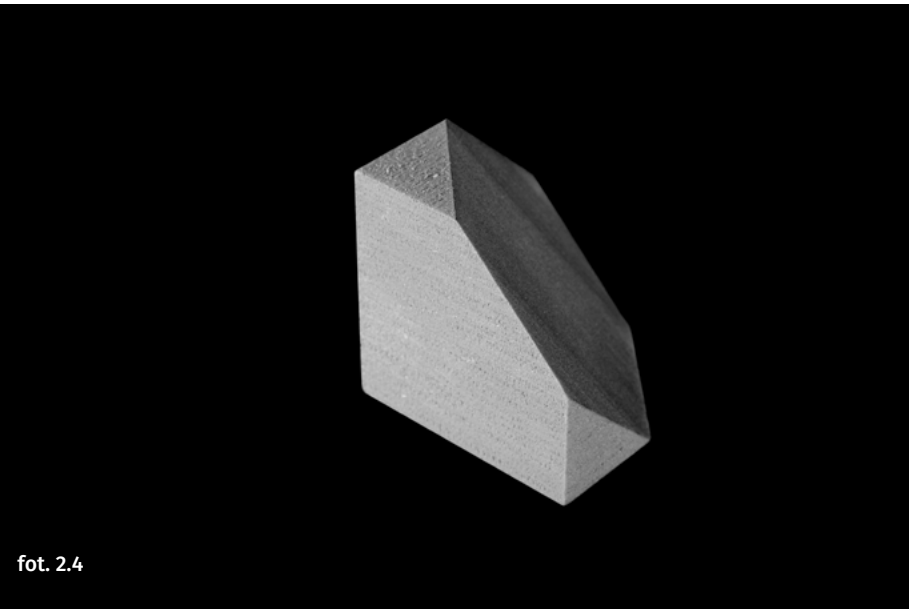
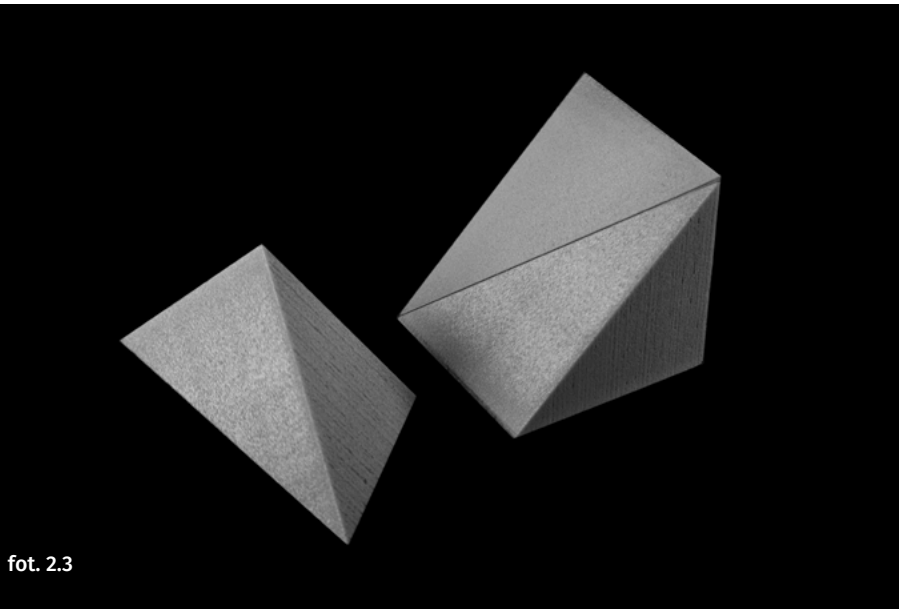
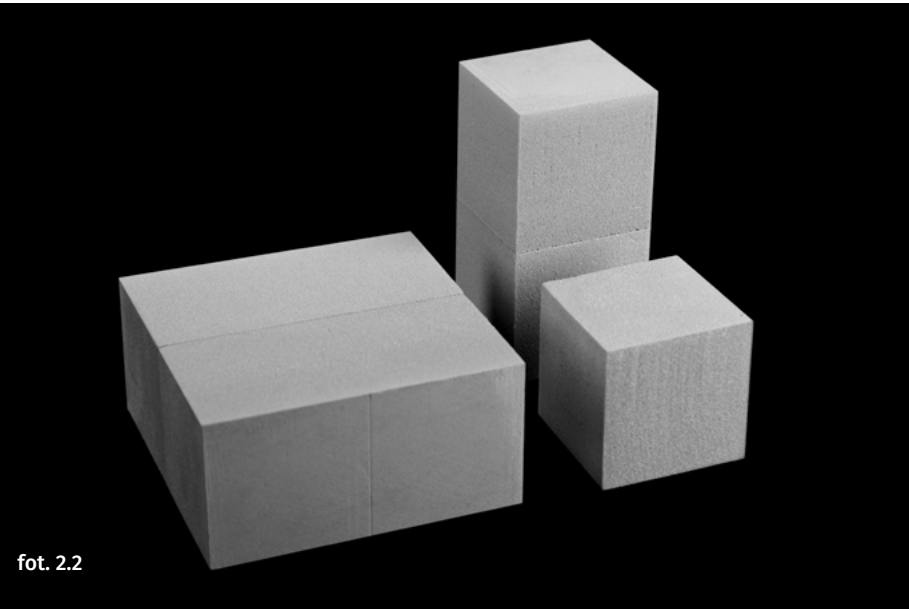
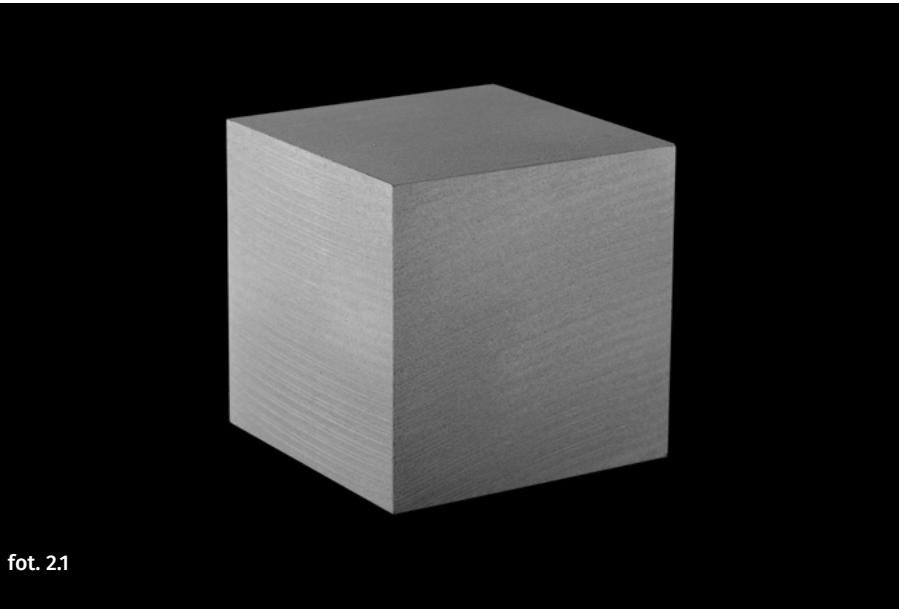
b

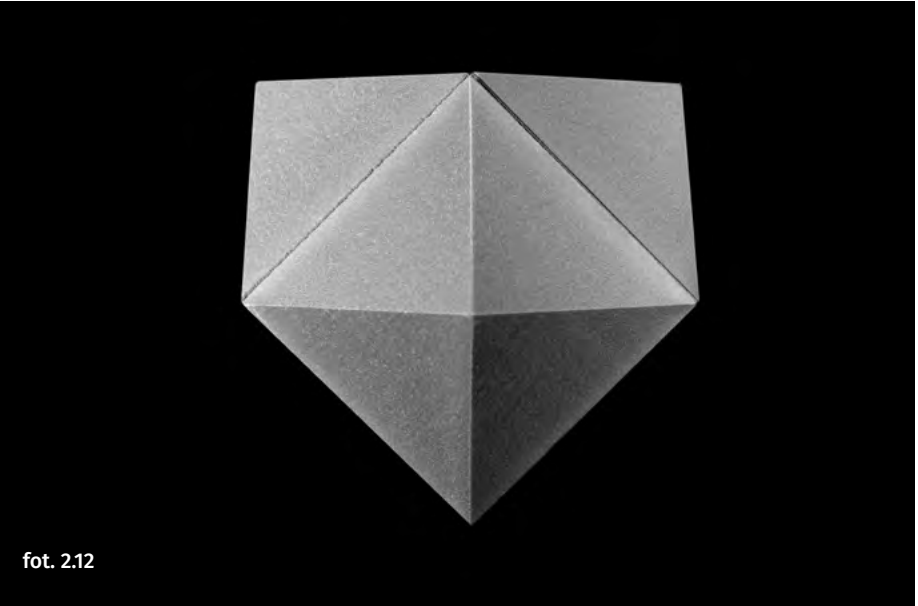
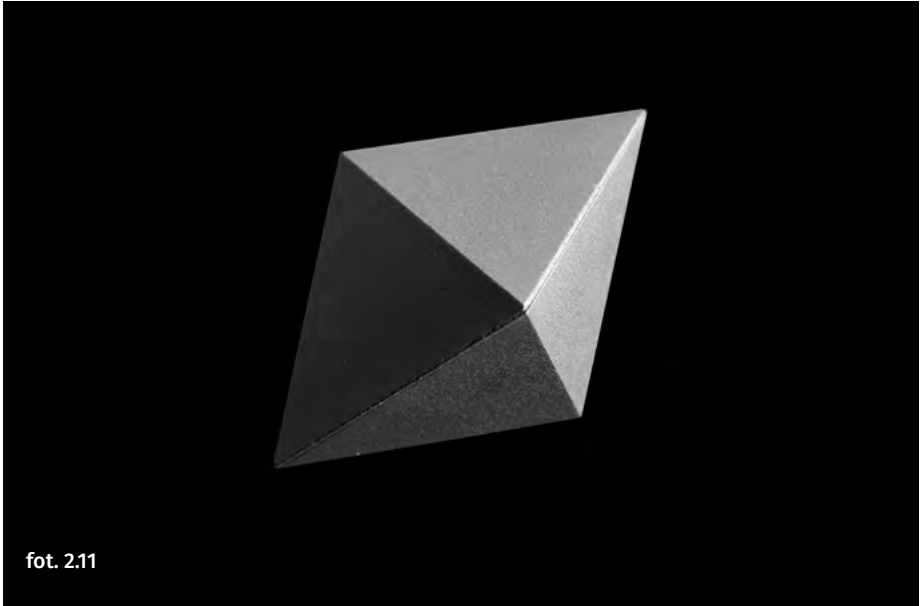
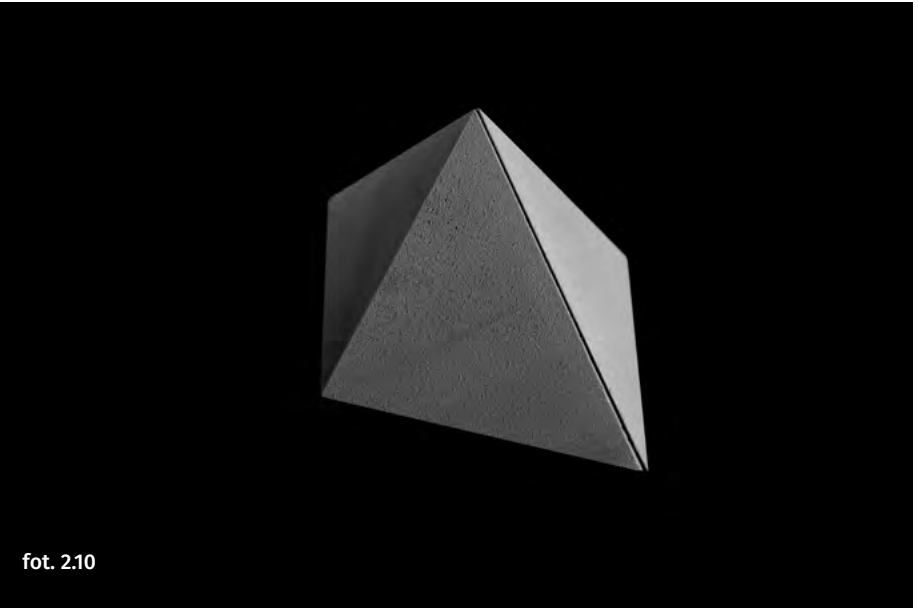
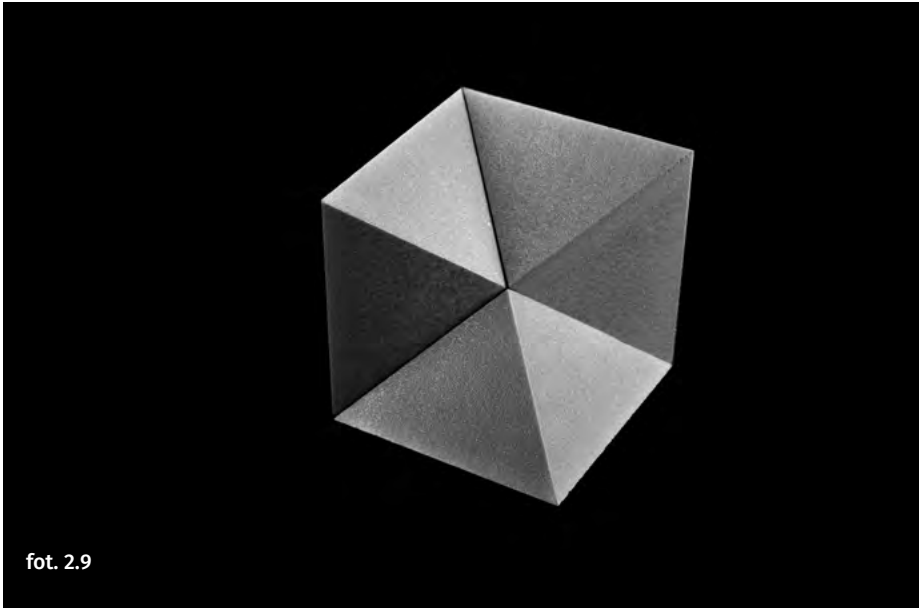
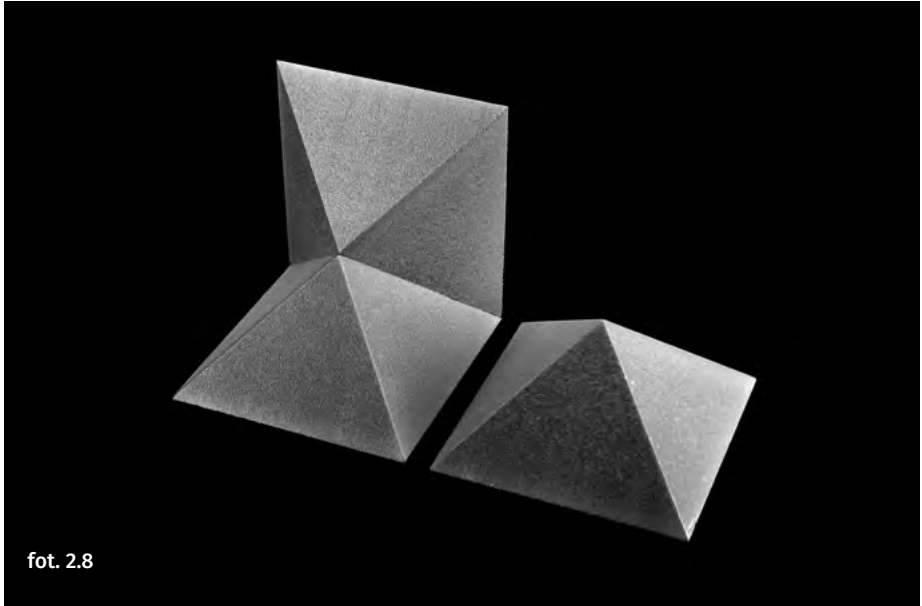
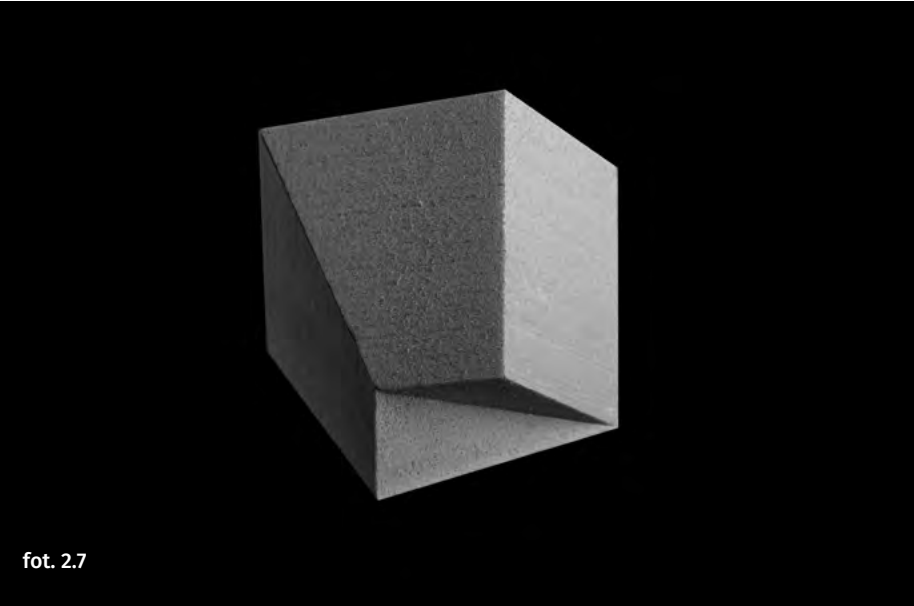
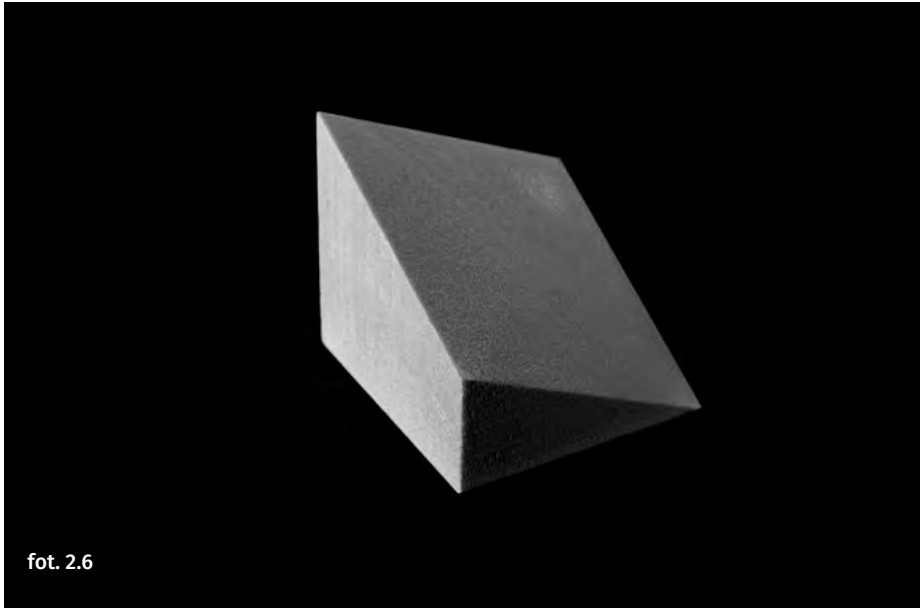
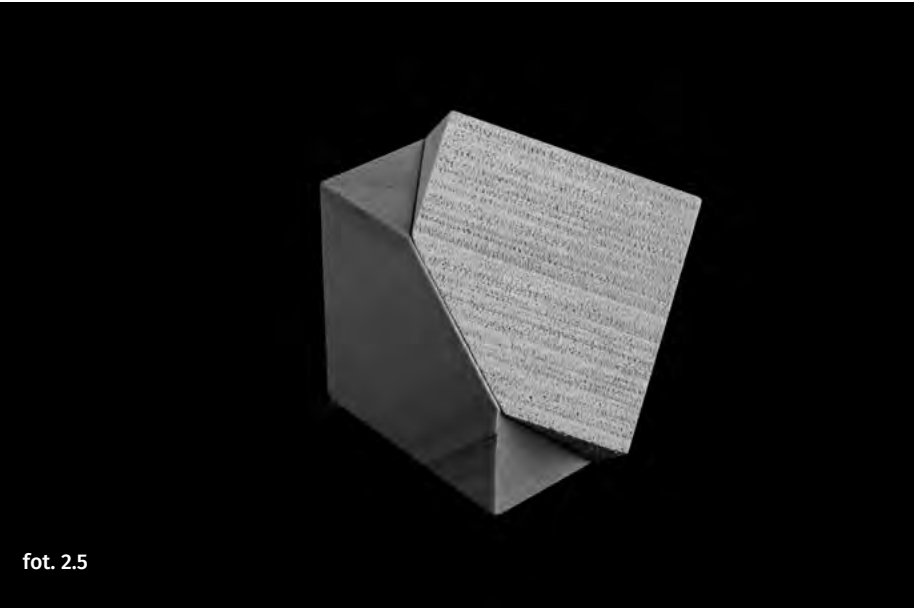


c



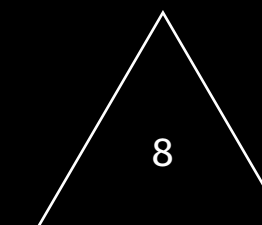
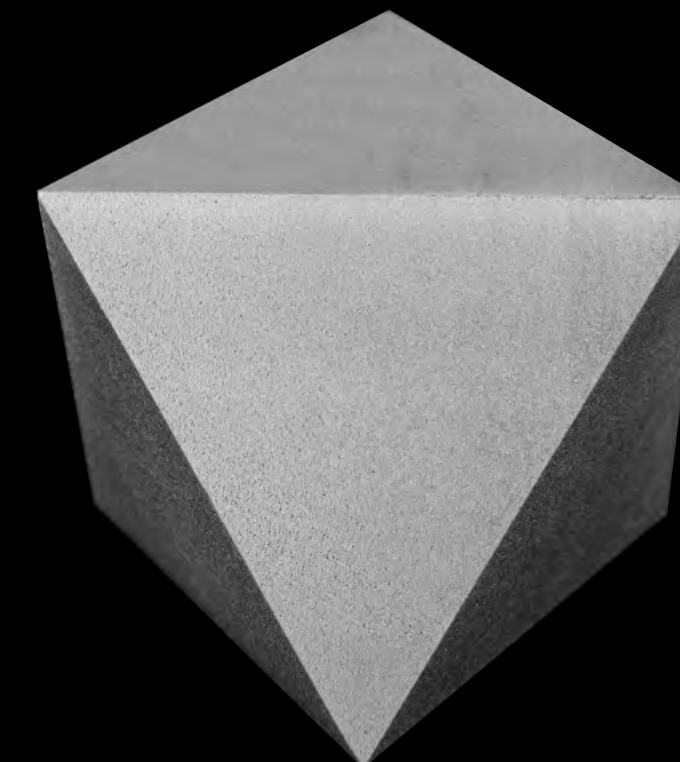
Rys. 2.2 HEKSAEDR, szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony wierzchołka c) od strony krawędzi.





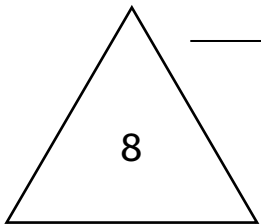
3

OKTAEDR 0
Ośmiościan foremny



OKTAEDR 0

Ośmiościan foremny



Antygraniastosłup⁹ o podstawie trójkąta, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi albo dwa ostrosłupy kwadratowe (piramidy) złożone podstawami. Bryła nie tak łatwa w percepcji jak H, ale też nie tak trudna jak T. Sławna i „magiczna” ze względu na historię piramid egipskich. Szkielec wewnętrzny 0 jest najprostszy ze wszystkich brył foremnych, ponieważ jest ortogonalny. Tworzą go 3 proste przecinające się w środku pod kątem 90° a leżące na dwóch płaszczyznach wzajemnie prostopadłych. Dowolna powierzchnia sferyczna o środku wspólnym z bryłą przetnie te proste wyznaczając położenie przestrzenne wierzchołków 0 (rys. 3.1).

Szkielec zewnętrzny 0 tworzy 6 wierzchołków połączonych dwunastoma krawędziami. W każdym wierzchołku zbiegają się 4 krawędzie pod kątem 45° w stosunku do przekątnej bryły. Krawędzie układają się, podobnie jak w H, w 6 par wzajemnie równoległych, ale także w 3 kwadraty wzajemnie prostopadłe. Ściany układają się w 4 pary wzajemnie równoległe i przekręcone o kąt 60° wokół osi przechodzących przez ich środki. Kąt dwuścienny wynosi 109°28' (2 × 54°44'). Każda ściana styka się z trzema sąsiednimi.

Kontur 0 w trzech charakterystycznych rzutach przybiera kształt kwadratu, rombu i sześcioboku foremnego (rys. 3.2 a, b, c).

Oktaedr jest bryłą dualną do Heksaedru i odwrotnie. Jego 6 wierzchołków może stykać się ze środkami ścian H opisanego na 0, a kąt krawędziowy 0 jest równy połowie kąta dwuściennego H (→ Tabela zbiorcza).

Monolit 0 można wykonać z H, jako bryłę wpisaną weń, ale będzie to nieefektywne. W niniejszym studium został znaleziony lepszy sposób

na uzyskanie monolitu 0 z H. Otóż, 0 można wpisać w H w taki sposób, aby obie bryły miały równą krawędź, a przekątna 0 była równa przekątnej ściany H. Na przeciwległych ścianach H wyznaczamy przekątną, na której zaznaczamy 2 punkty równo odległe od środka. Odległość między punktami powinna być równa bokowi kwadratu. Wyznaczone punkty łączymy z przeciwległymi wierzchołkami kwadratu. Powstaje romb wpisany w kwadrat. Ścinamy boki H wzdłuż wyznaczonych linii pod kątem 90°. Powstaje graniastosłup o podstawie rombu. Następnie wykonujemy 4 cięcia wzdłuż krótszej przekątnej rombu pod kątem 35°16' – po 2 cięcia na obu podstawach (fot. 3.2).

Najprościej będzie wykonać monolit 0 z graniastosłupa kwadratowego o wysokości przekątnej kwadratu podstawy. Na obwodzie wyznaczamy linię połowiącą wysokość graniastosłupa i wykonujemy po 2 cięcia pod kątem 54°44' każdej ściany wzdłuż wyznaczonej linii środkowej (fot. 3.3). Jeszcze inny sposób wykonania monolitu 0 polega na ścinaniu naroży graniastosłupa o podstawie sześcioboku foremnego (fot. 3.3). Na obu podstawach kreślimy trójkąty wzajemnie skrócone o 60° – łącząc co drugi wierzchołek sześcioboku. Boki trójkątów będą krawędziami 0. Wysokość graniastosłupa wyznaczamy trójkątem prostokątnym z kątem 54°44', w którym przeciwprostokątna będzie krawędzią 0, a dłuższa przyprostokątna szukaną wysokością. Wykonujemy 6 cięć naroży graniastosłupa pod kątem 70°32' wzdłuż boków trójkątów na obu podstawach. W ten sposób uzyskujemy 6 ścian pasa obwodowego. Pozostałe dwie ściany powstają samorzutnie na podstawach graniastosłupa. Warto zauważyć, że tym samym kątem wykonywany był monolit T z graniastosłupa trójkątnego. Dlatego monolit 0 można także uzyskać z T ścinając jego naroża do połowy krawędzi.

⁹ Galeria wielościanów – str. 62

Ortogonalny podział bryły w przypadku Oktaedru jest równocześnie podziałem strukturalnym. Podział trzema płaszczyznami wzdłuż krawędzi dzieli całość na 8 równych części. Są to ostrosłupy o podstawie trójkąta równobocznego o kątach dwuściennych 54°44' przy podstawie i 90° między ścianami bocznymi – dokładnie takie same jak ścięte naroża H (fot. 3.4). Następnie łącząc dwie takie jednostki ścianami bocznymi otrzymujemy ¼ 0, a łącząc 4 jednostki, co jest możliwe na dwa sposoby, otrzymujemy ½ 0 (fot. 3.4). Z dwóch jednostek złożonych podstawami powstaje nowa, interesująca bryła – sześciościan o jednorodnych ścianach trójkątnych i różnych kątach dwuściennych: 109°28' i 90°.

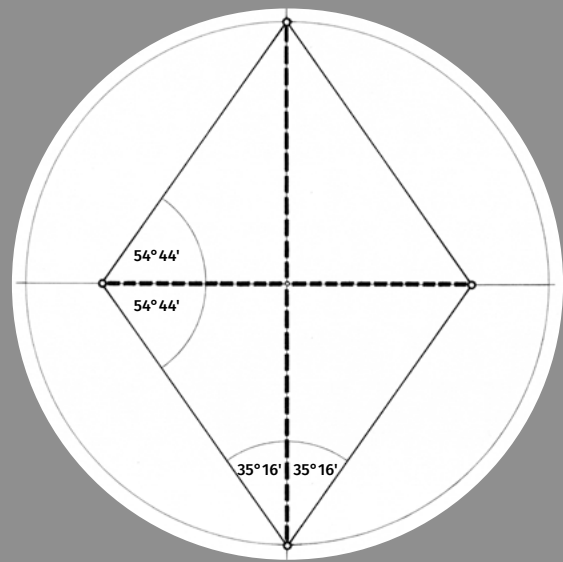
Skośny podział 0 jedną płaszczyzną pod kątem 70°32' dzieli całość na połowy, a kształt przekroju jest tu sześciobokiem foremnym. Podobnie jak w przypadku H, możemy przekręcić jedną połowę o 60° aby otrzymać inną bryłę wypukło-wklęsłą – bliźniak 0 (fot. 3.5, 3.6). Taką połowę 0 można łączyć z analogicznymi połowami H, H/0 a także Ɔ tworząc

hybrydy (fot. 3.7). Skośny podział 0 czterema płaszczyznami podzieli całość na 14 nierównych części – 6 małych Oktaedrów zajmujących naroża bryły, oraz 8 małych Tetraedrów wypełniających środka ścian (fot. 3.8, 3.9). Na tym przykładzie widać wyraźnie jak można wypełniać przestrzeń obiema bryłami, które się dopełniają. Nie jest możliwa pełna zabudowa przestrzeni samymi Oktaedrami ani samymi Tetraedrami.

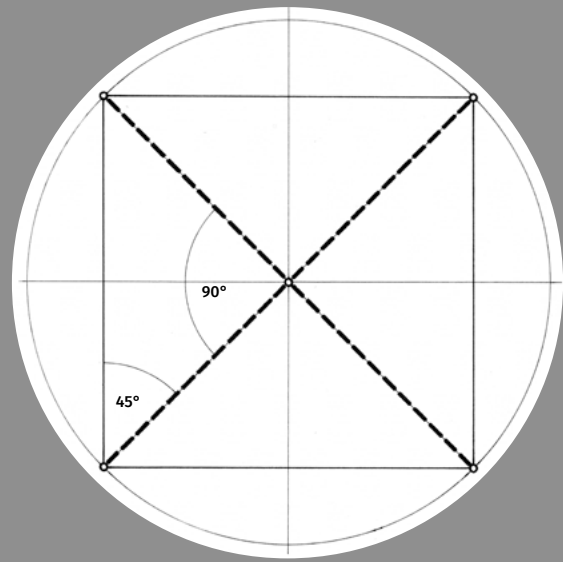
Jeśli do każdej ściany 0 dołączymy jednostkę strukturalną 0, to powstanie Oktaedr potrójny (fot. 3.10). Jeśli do każdej ściany 0 dołączymy T, to powstanie Oktaedr gwiazdzisty, czyli wspomniane wcześniej dwa przenikające się Tetraedry.

Zdeformowane ośmiościany można wykonywać z graniastosłupa o podstawie rombu. Kąt dwuścienny 0 zostanie zachowany tylko w pasie obwodowym bryły (fot. 3.11). Na fotografii pokazano również eksperymentalną bryłę ośmiościenną, wykonaną z graniastosłupa o podstawie trójkąta równobocznego, któremu ścięto naroża pod kątem 54°44'.

a

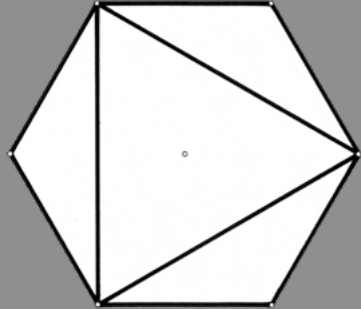


b

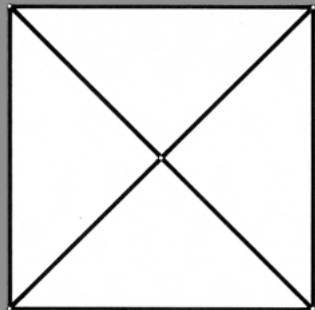


Rys. 3.1 OKTAEDR, szkielet wewnętrzny z kątami w dwóch rzutach.

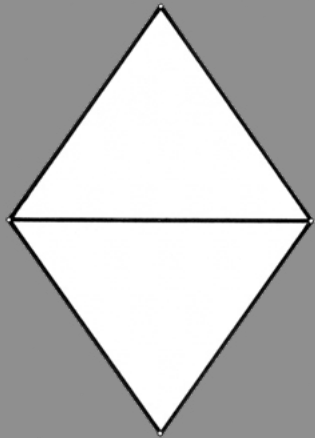
a



b



c



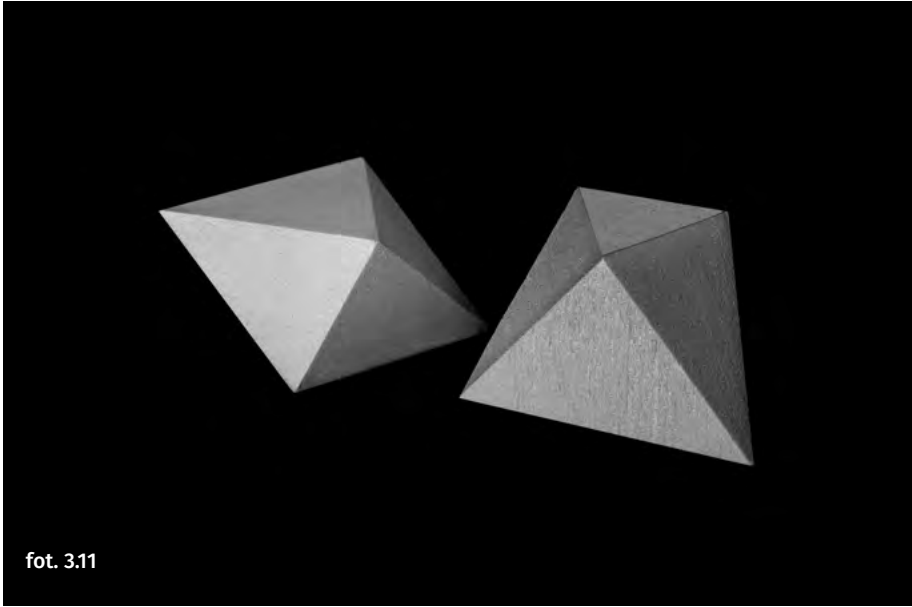
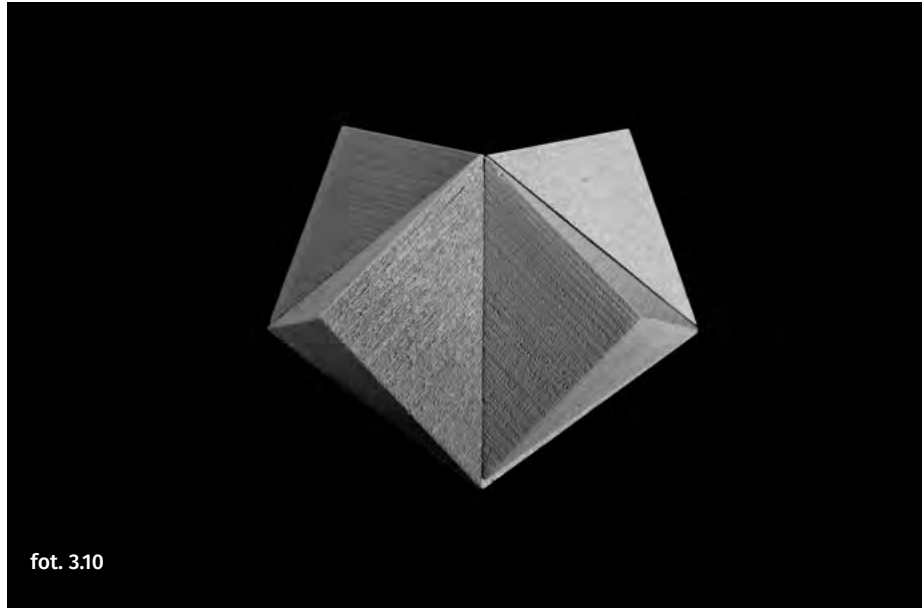
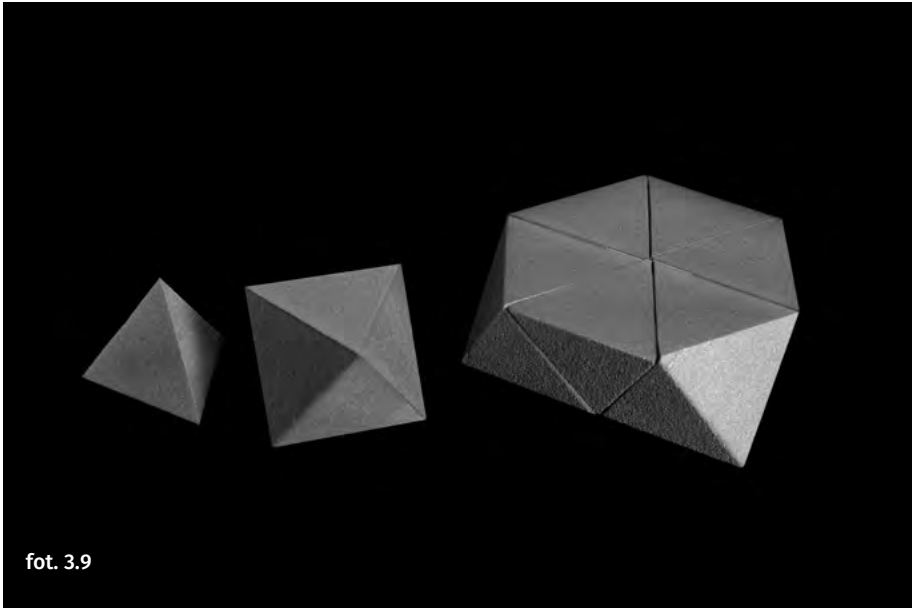
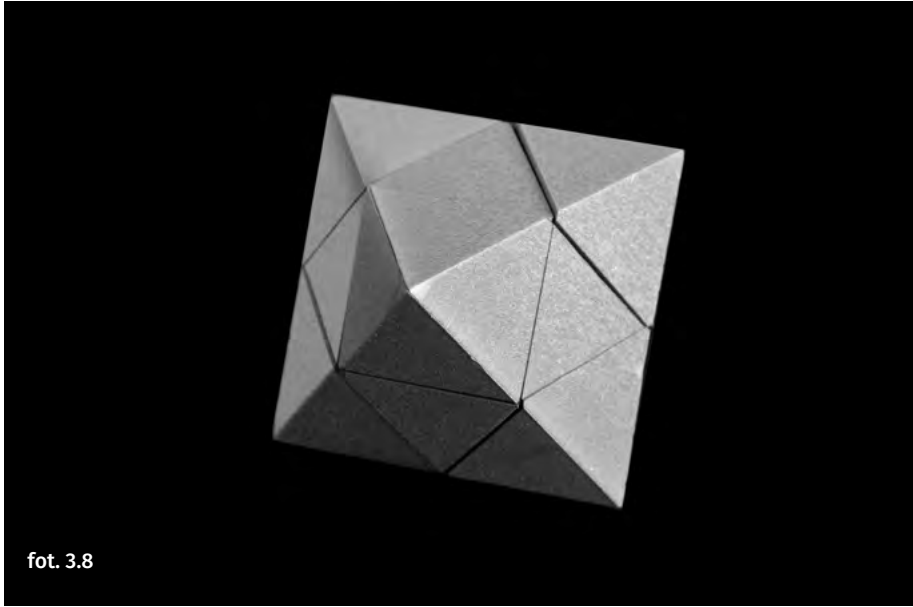
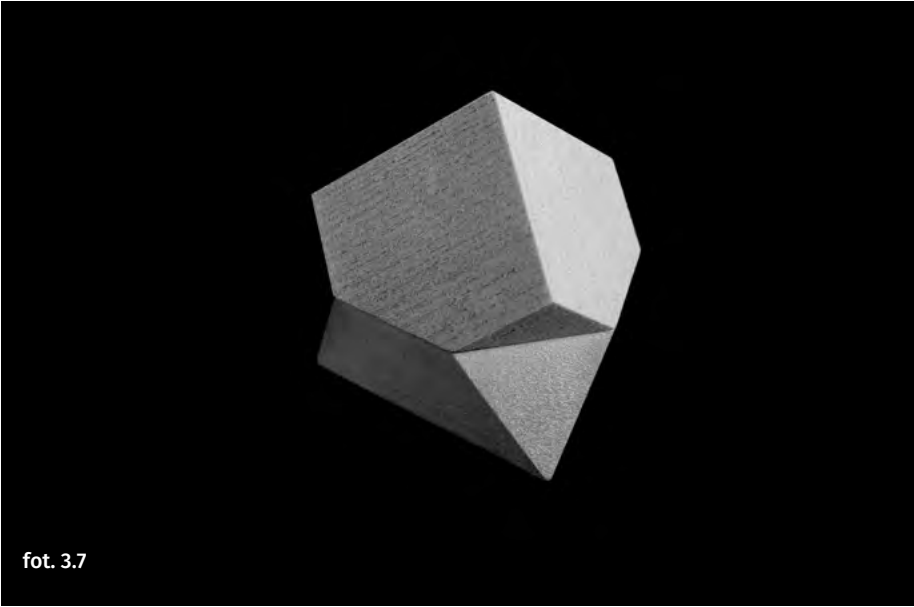
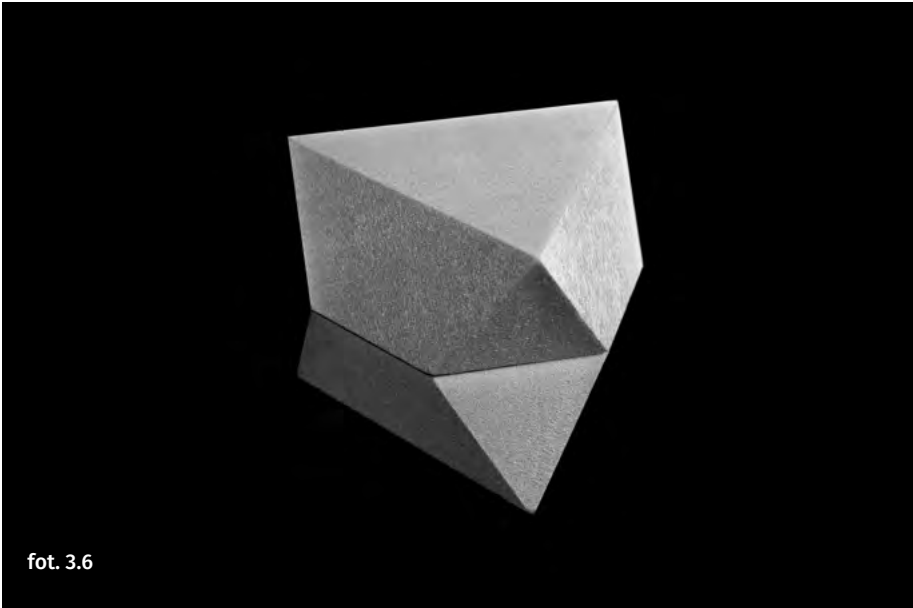
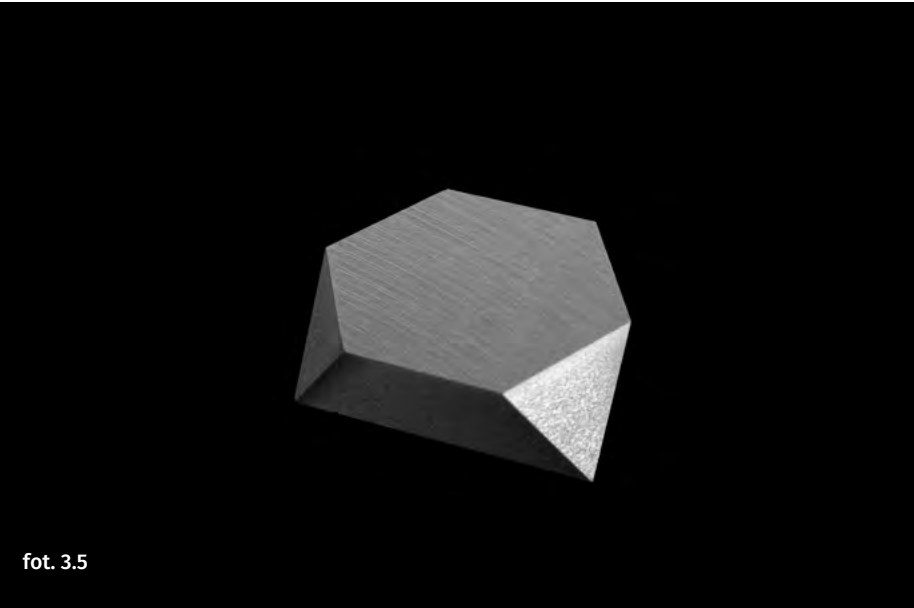
Rys. 3.2 OKTAEDR, szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony wierzchołka c) od strony krawędzi.

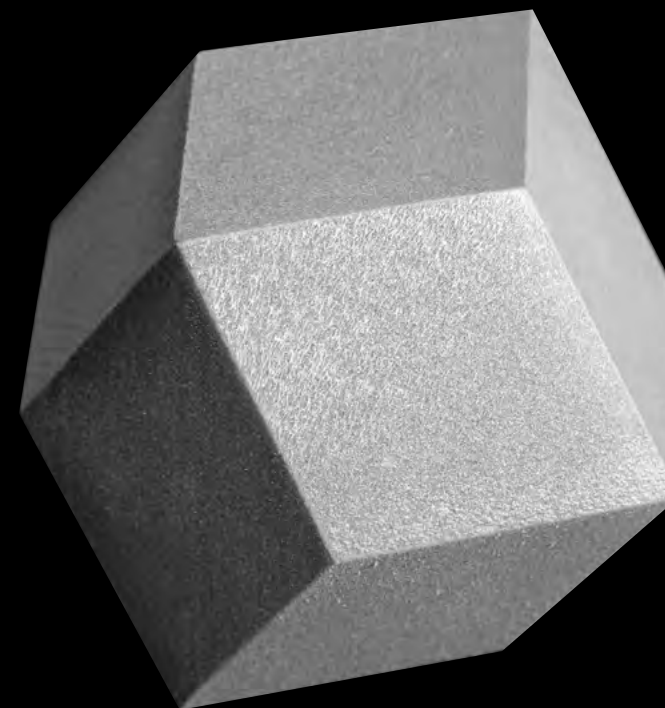
fot. 3.1

fot. 3.2

fot. 3.3

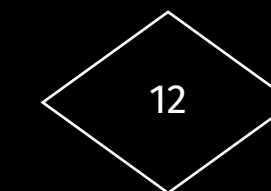
fot. 3.4



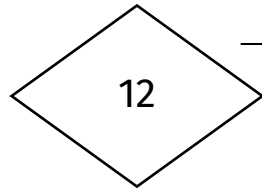


4

**DWUNASTOŚCIAN
ROMBOWY** Φ



DWUNASTOŚCIAN ROMBOWY $\{12\}$



Powstaje przez takie nałożenie szkieletów Heksaedru i Oktaedru, w którym krawędzie obu brył przecinają się pod kątem prostym w swoich środkach. Gdy połączymy wszystkie wierzchołki ($8 + 6 = 14$) odcinkami prostymi – powstanie 12 rombów o kątach $70^{\circ}32'$ i $109^{\circ}28'$.

Jest to bryła półforemna o dwoistej naturze. Sprawia dziwne wrażenie, ponieważ jej ściany są jednorodne, a jest nieregularna. Wrażenie to powodują przekątne bryły o różnej długości. Przekątne Oktaedru, na których końcach zbiegają się 4 krawędzie są znacznie dłuższe od przekątnych Heksaedru, na których końcach zbiegają się 3 krawędzie. W sumie $\{12\}$ posiada 24 krawędzie. Każda z nich jednym końcem łączy się z przekątną 0 pod kątem $54^{\circ}44'$, a drugim końcem z przekątną H pod kątem $70^{\circ}32'$. Przeciwległe ściany układają się w 6 par wzajemnie równoległych. Kąt dwuścienny wynosi 120° ($2 \times 60^{\circ}$). Każda ściana styka się z czterema sąsiednimi (rys. 4.1).

Dwunastościan rrombowy nie wpisuje się w jedną sferę. Posiada za to specjalną i nieoczywistą własność wypełniania przestrzeni. Przy wielowarstwowej zabudowie przestrzeni każda bryła może stykać się z dwunastoma sąsiednimi¹⁰ (fot. 4.10).

Kontur $\{12\}$ w charakterystycznych rzutach przybiera kształt kwadratu, sześcioboku nieforemnego i sześcioboku foremnego – analogicznie do H/0 (rys. 4.2 a, b, c). Bryłą dualną do Dwunastościanu rrombowego jest właśnie Heksaedr ścięty (H/0).

Monolit bryły najlepiej będzie wykonywać z graniastosłupa kwadratowego o wysokości równej przekątnej kwadratu (fot. 4.2). Wystarczy ściąć 8 naroży graniastosłupa pod kątem 45° wzdłuż wyznaczonych

przekątnych obu podstaw. Pozostałe 4 ściany powstaną samorzutnie na ścianach bocznych graniastosłupa.

Skośny podział $\{12\}$ jedną płaszczyzną prostopadłą do krótszej przekątnej bryły pod kątem $54^{\circ}44'$ da nam przekrój w kształcie sześcioboku foremnego. Pozwoli to na przekształcenie bryły przez obrót jednej połowy o 60° w zaskakująco odmienną bryłę o tych samych własnościach. Będzie to dwunastościan rrombowo-trapezowy. W obu figurach kąty ścian są takie same (fot. 4.3, 4.4).

Ortogonalny podział $\{12\}$ trzema płaszczyznami daje równe części bryły: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$. Z ósmych części można złożyć dwie różne ćwiartki i dwie różne połowy. Z dwóch ósmych części można złożyć inną bryłę – np. graniastosłup kwadratowy i jego przekształcenie przez obrót o 180° jednej części (fot. 4.5, 4.6, 4.7).

Strukturalny podział $\{12\}$, podobnie jak w przypadku H, nie będzie łatwy do wykonania z monolitu bryły. Prościej będzie wykonać 12 ostrosłupów o podstawie rombu i wysokości równej połowie dłuższej przekątnej rombu – z graniastosłupów rrombowych, ścinając je pod kątem 60° wzdłuż krawędzi podstawy. Ostrosłup będący jednostką strukturalną $\{12\}$ posiada 3 różne kąty dwuścienne: 60° przy podstawie, oraz 90° i 120° między ścianami bocznymi (fot. 4.8). Jeśli połączymy dwie jednostki rrombowymi podstawami powstanie bryła ośmiościenna o jednorodnych ścianach trójkątnych i różnych kątach dwuściennych 90° i 120° . Dokładnie taka sama bryła powstanie z połączenia dwóch jednostek strukturalnych H kwadratowymi podstawami (fot. 2.11). Z trzech jednostek strukturalnych $\{12\}$ złożymy $\frac{1}{4}$ bryły. Taka ćwiartka jest nader interesującym sześciościaniem rrombowym (zdeformowanym sześcianiem). Bryłę tę można w prosty sposób powielać. Na płytę

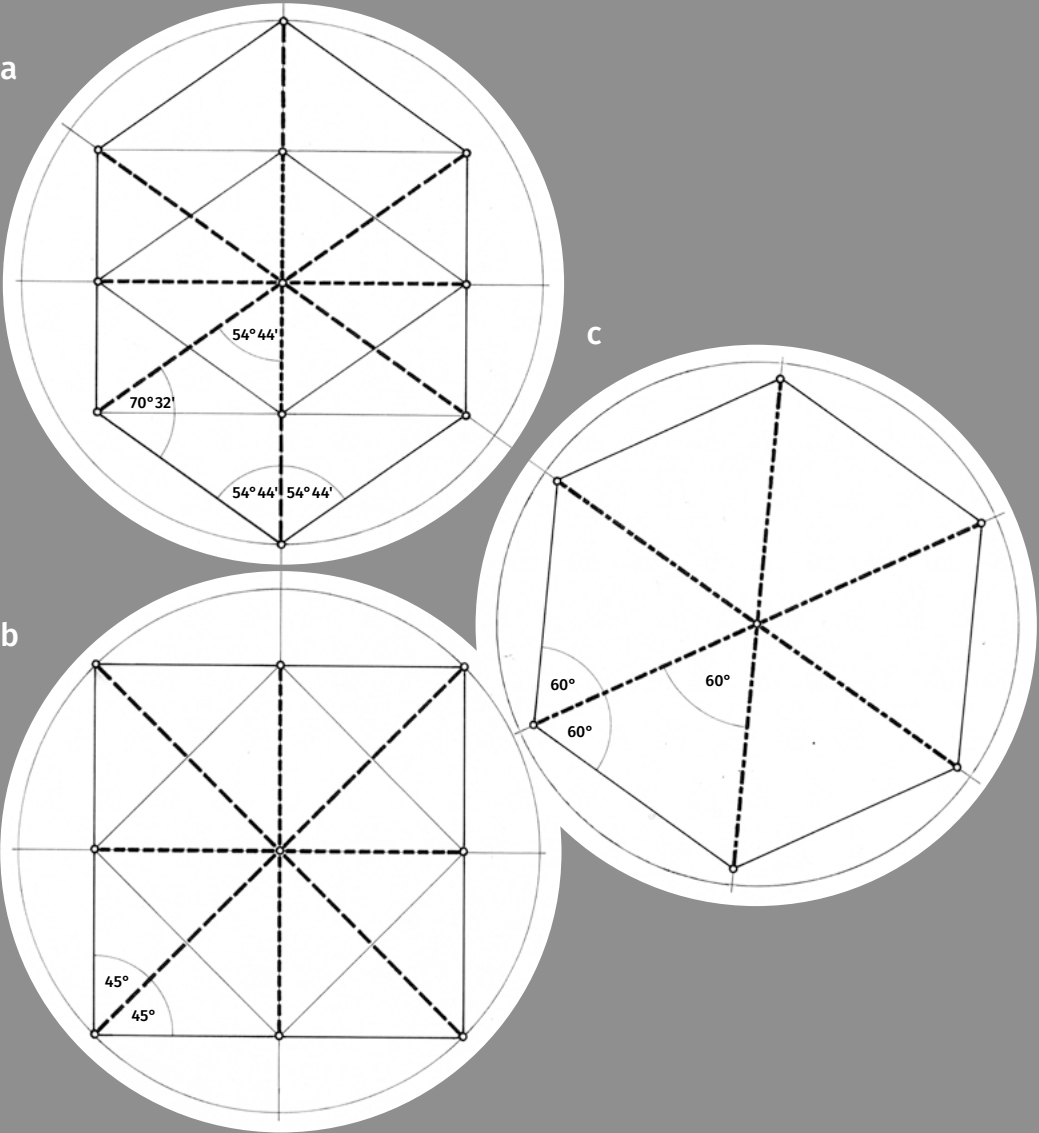
o grubości równej połowie dłuższej przekątnej rombu nanosimy siatkę rrombową i przecinamy ją pod kątem 60° wzdłuż wyznaczonych linii (fot. 4.9). Połowę bryły można złożyć z dwóch takich ćwiartek albo z sześciu jednostek strukturalnych na dwa sposoby (fot. 4.8).

Dwunastościan rrombowy ma wyjątkowy potencjał formotwórczy. Z wszystkich jego podziałów na równe części uzyskujemy jednostki, z których możemy budować różne obiekty przestrzenne na wiele sposobów (fot. 4.11, 4.12).

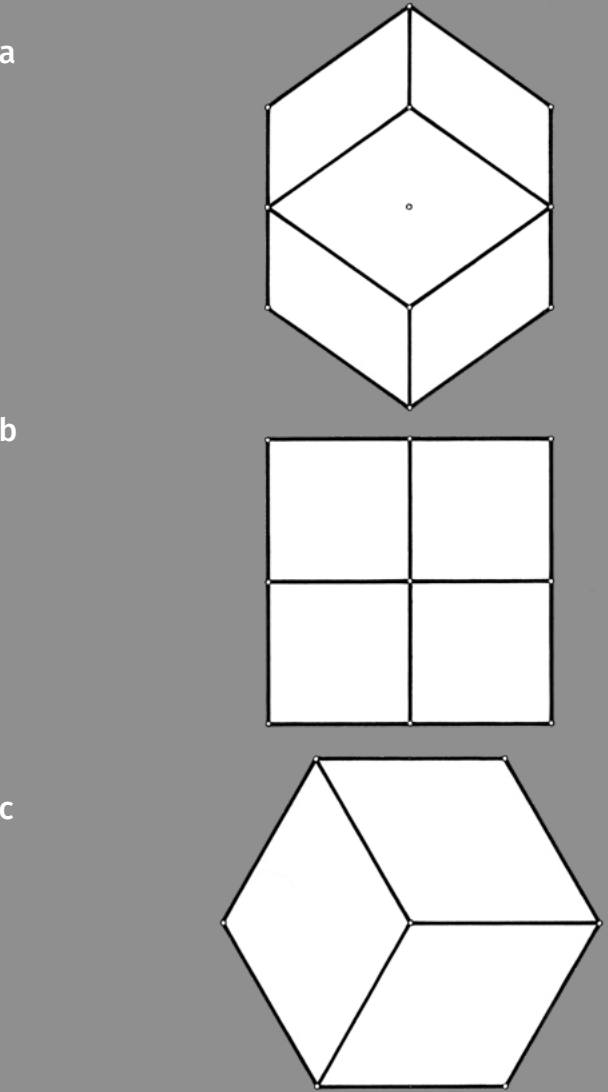
Jeśli do każdej ściany $\{12\}$ dodamy jednostkę strukturalną, to powstanie gwiaździsty dwunastościan rrombowy (fot. 4.13).

Z graniastosłupa kwadratowego o wysokości równej dwóm bokom kwadratu podstawy można wykonać eksperymentalną bryłę dwunastościenną. Po ścięciu naroży graniastosłupa pod kątem $54^{\circ}44'$ wzdłuż przekątnych obu podstaw, powstanie dwunastościan o ośmiu ścianach rrombowych oraz czterech ścianach kwadratowych. Okazuje się, że bryłami takimi także można zabudować przestrzeń (fot. 4.14, 4.15).

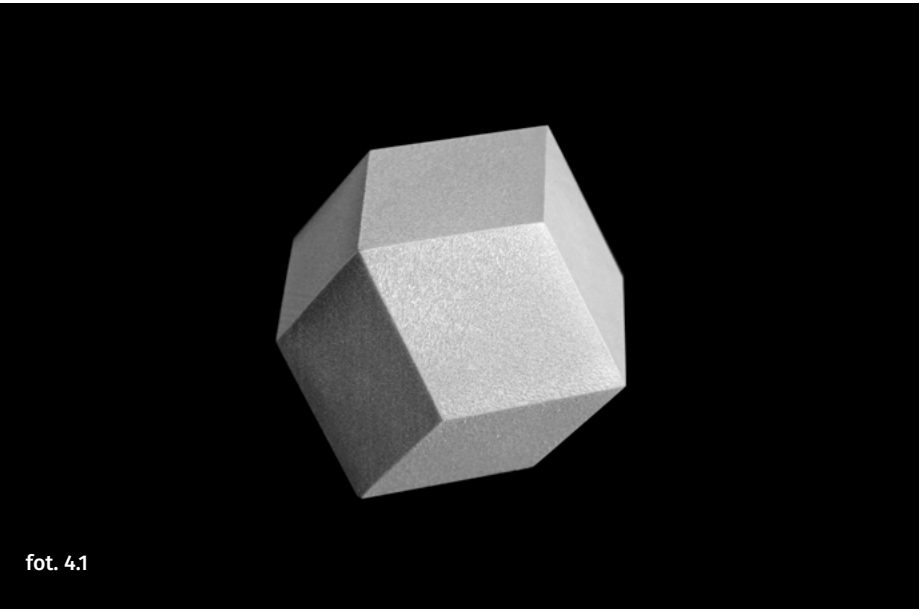
¹⁰ *Kalejdoskop matematyczny* – str. 180, 201



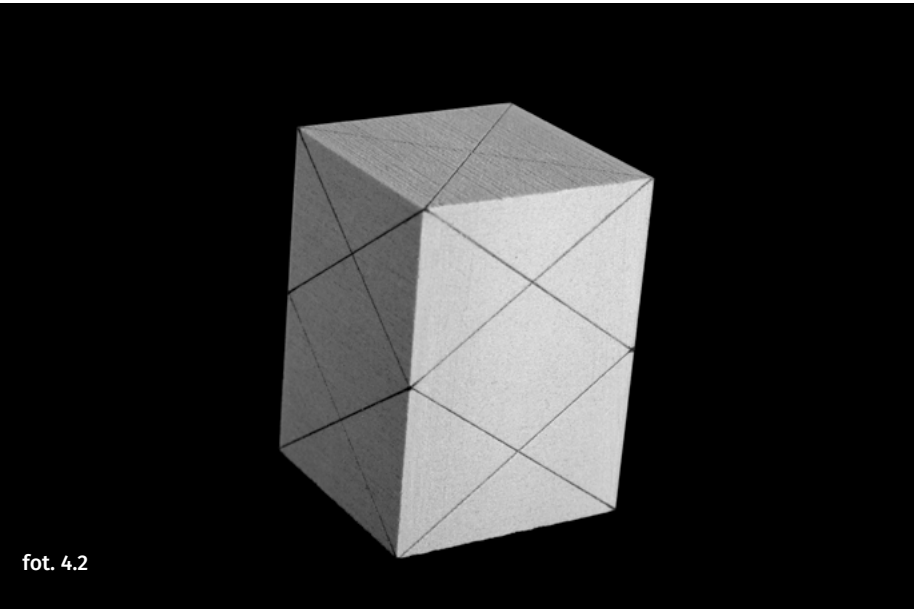
Rys. 4.1 DWUNASTOŚCIAN ROMBOWY, szkieleł wewnętrzny z kątami w trzech rzutach.



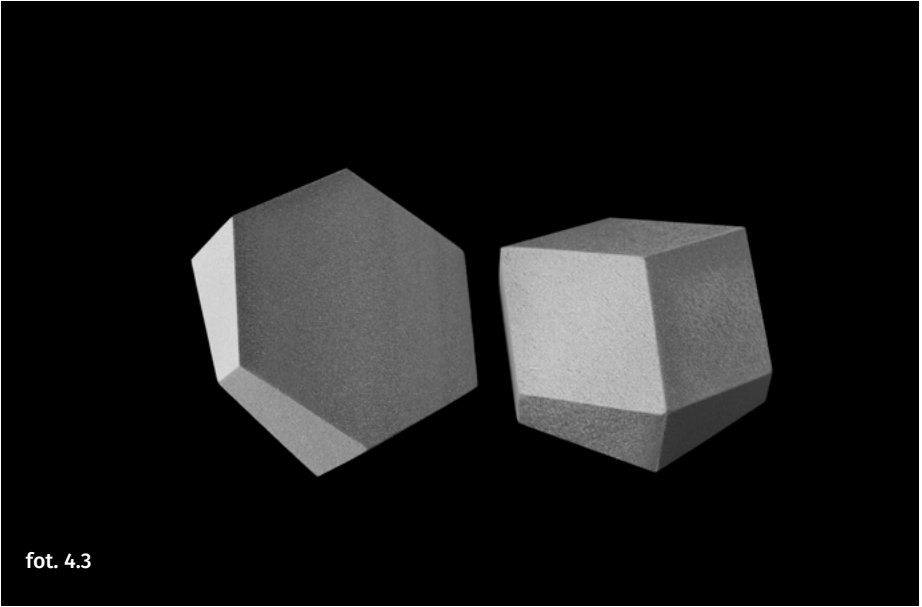
Rys. 4.2 DWUNASTOŚCIAN ROMBOWY, szkieleł zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony wierzchołka O c) od strony wierzchołka H.



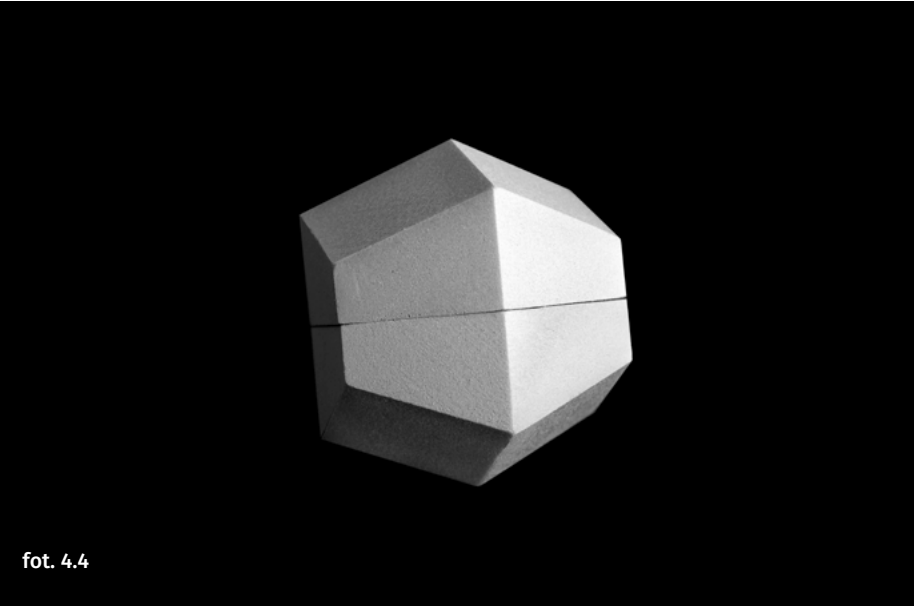
fot. 4.1



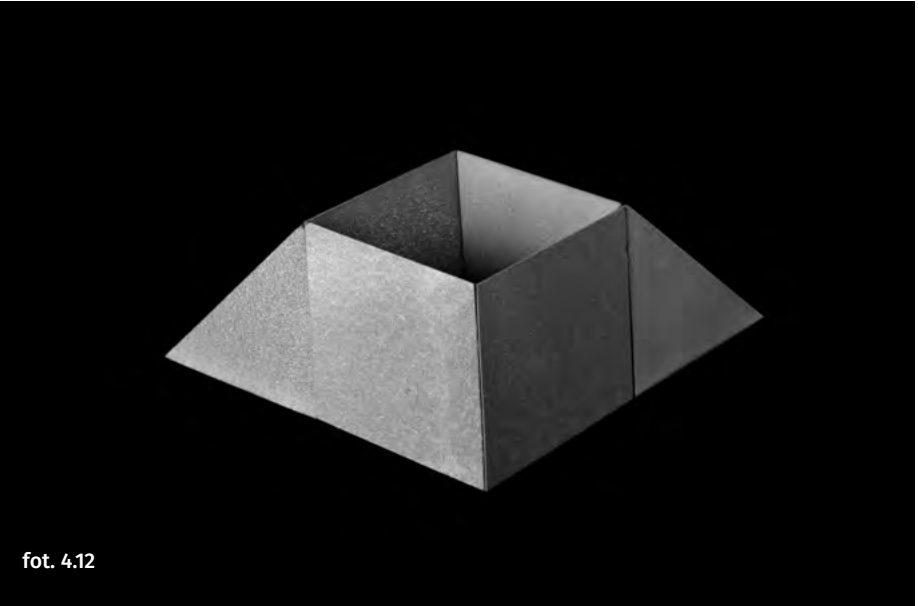
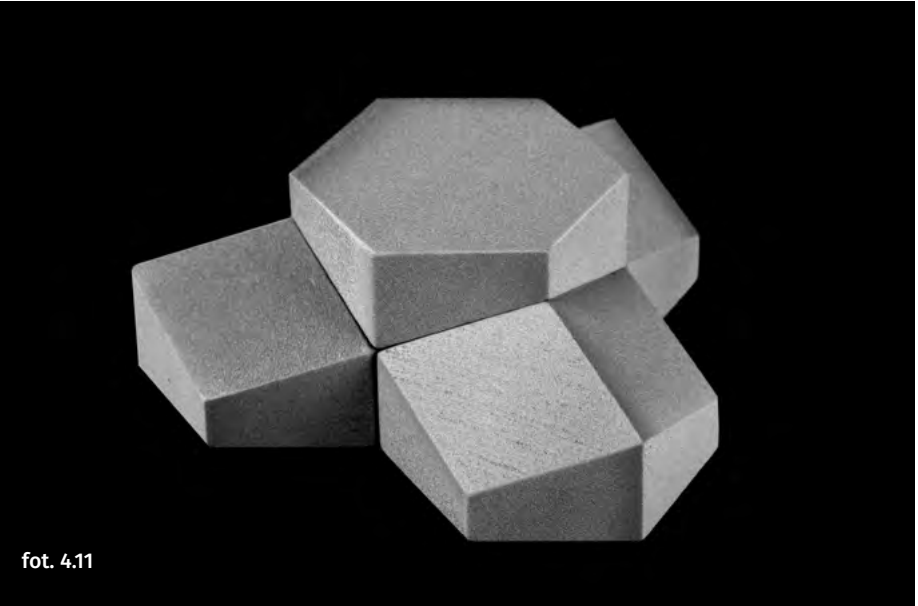
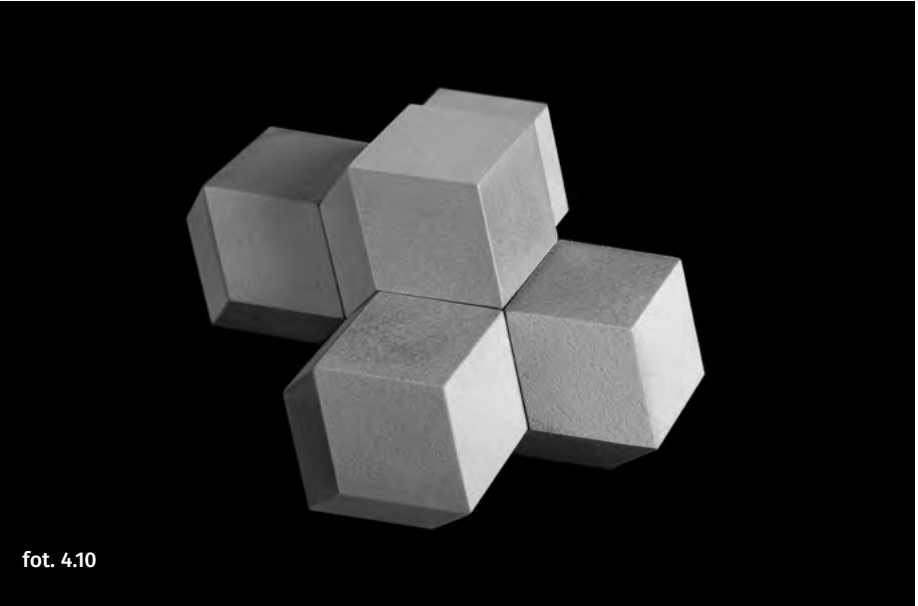
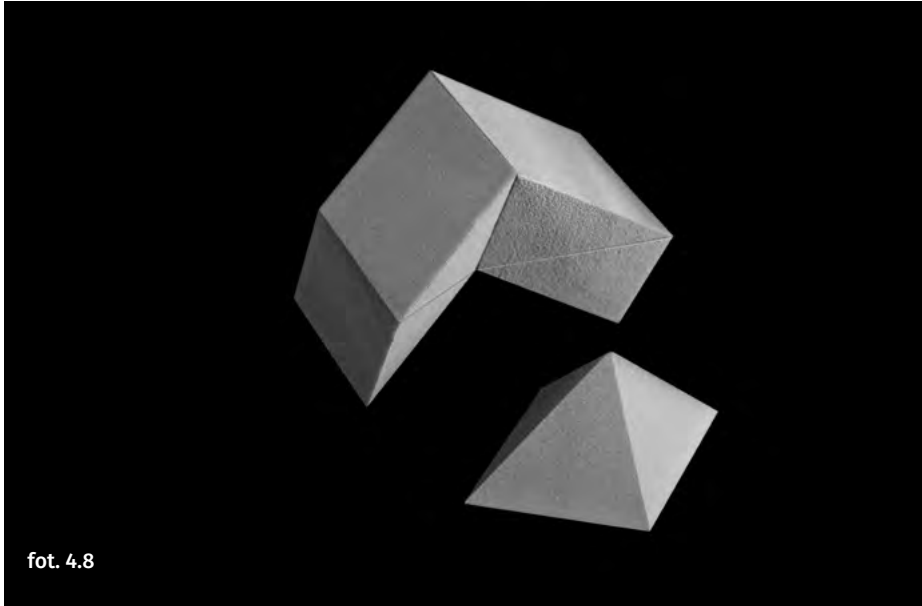
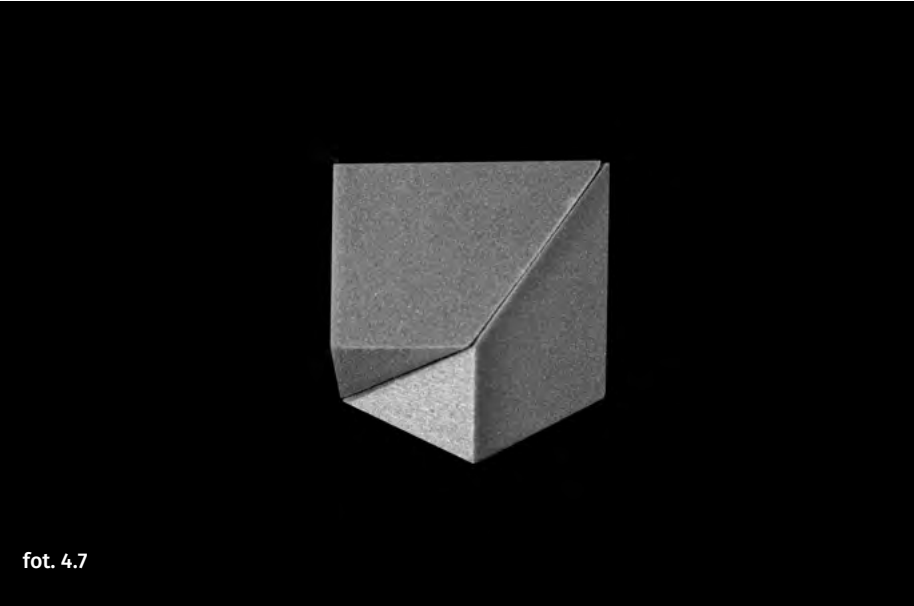
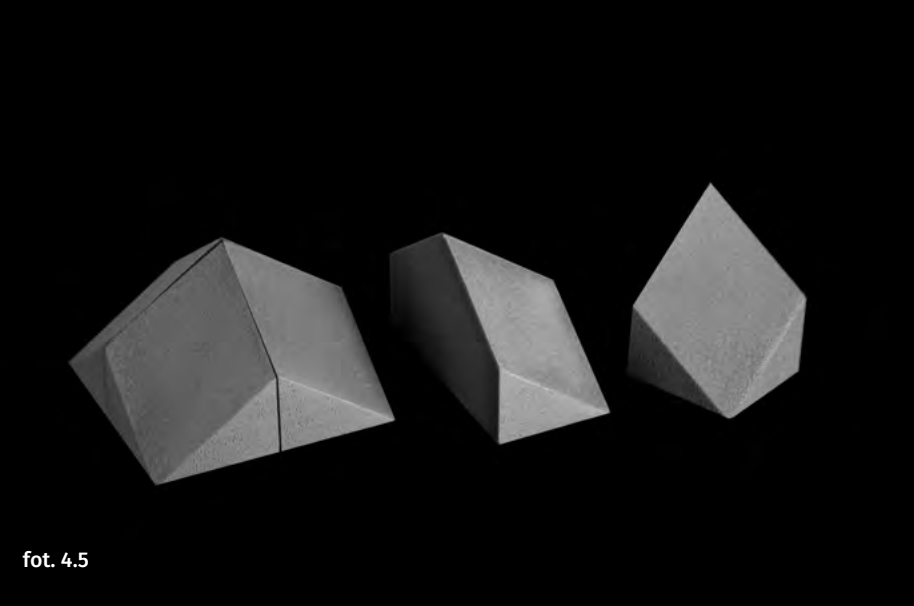
fot. 4.2

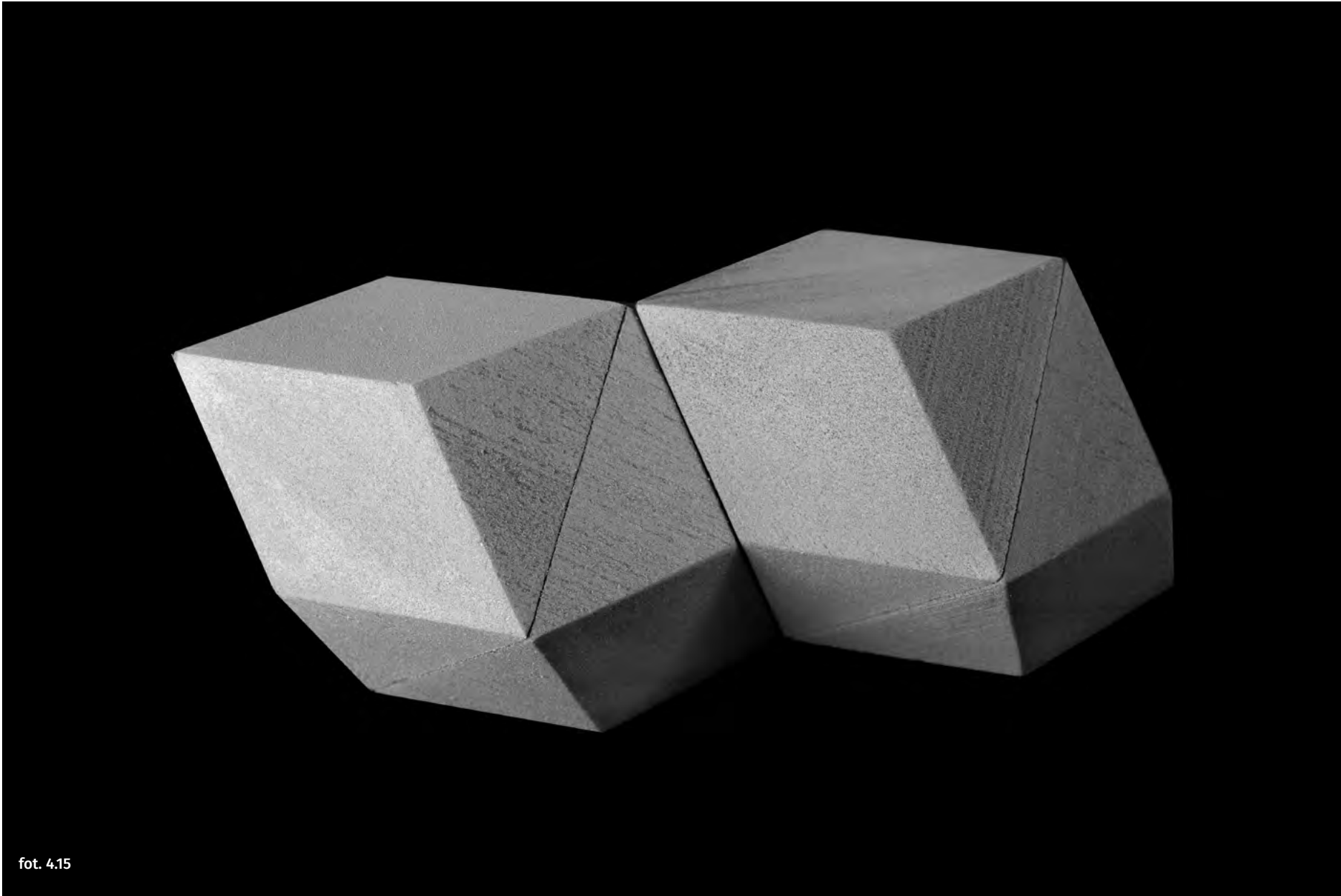
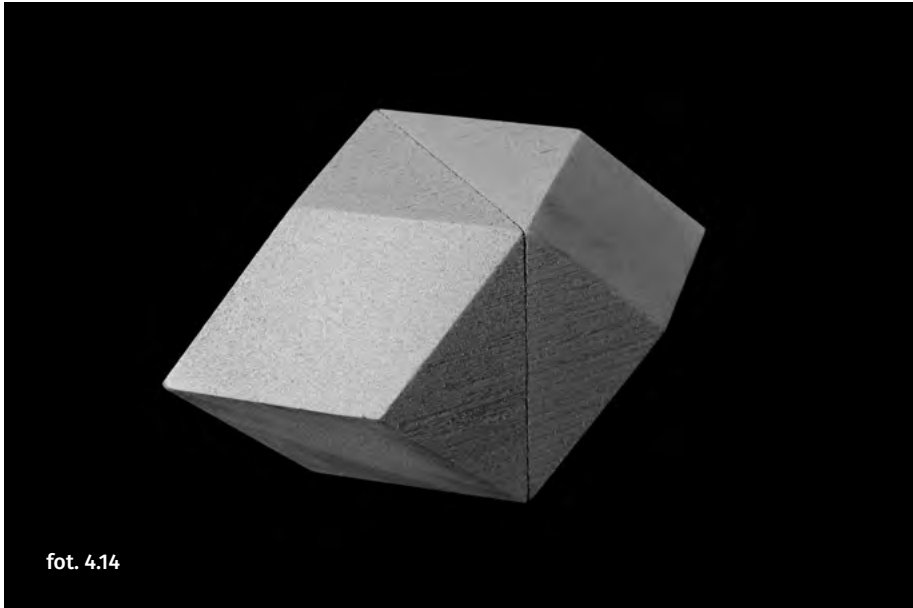
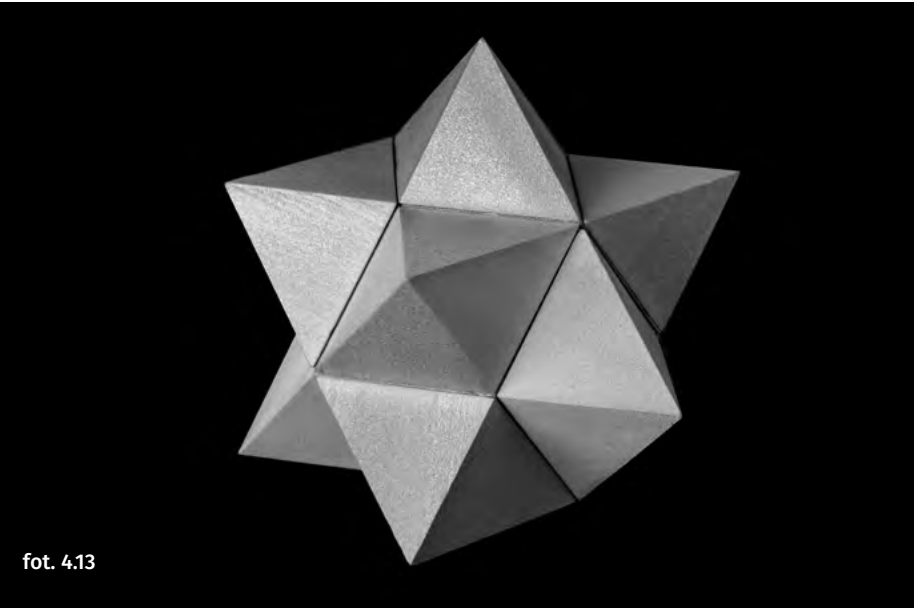


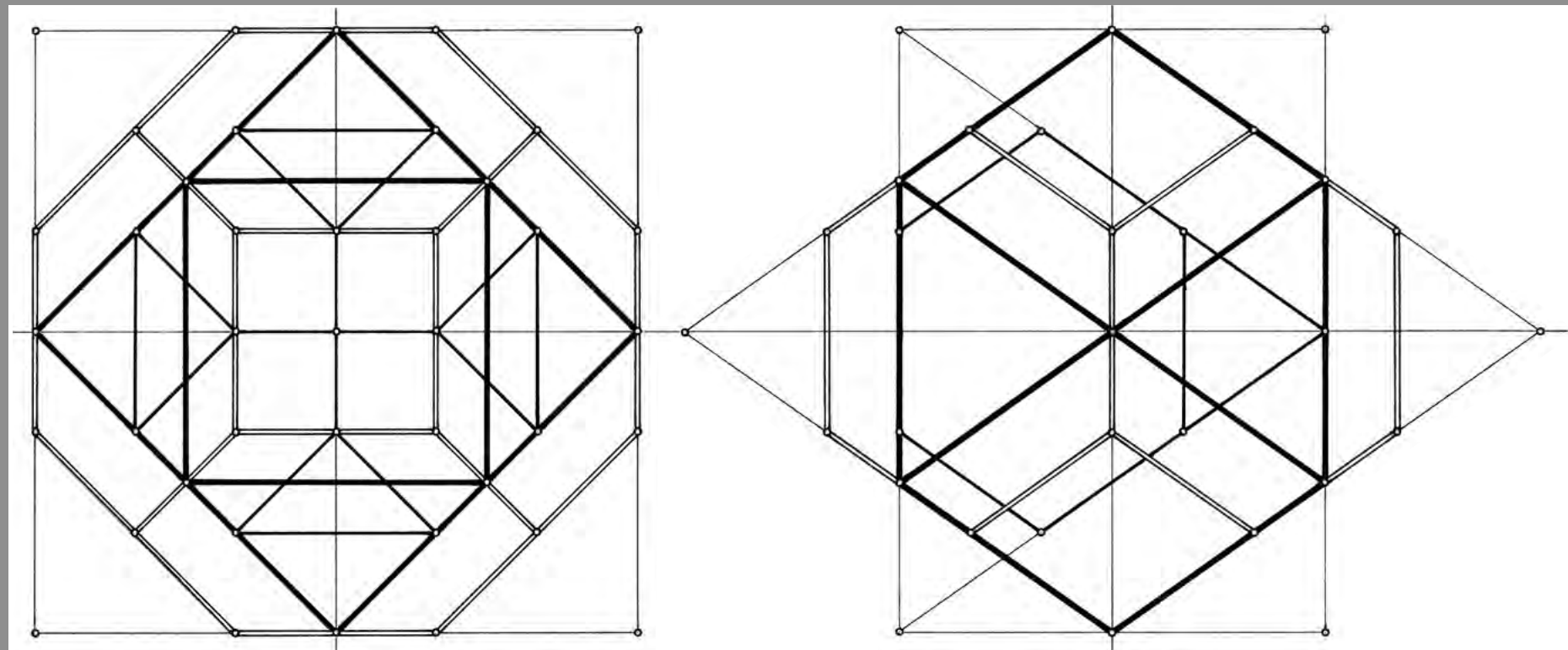
fot. 4.3



fot. 4.4







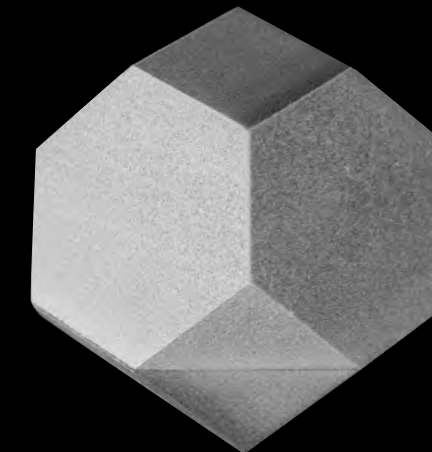
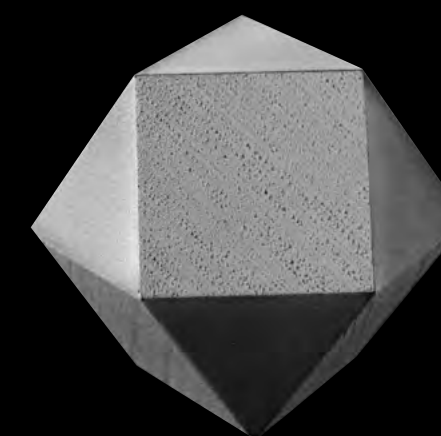
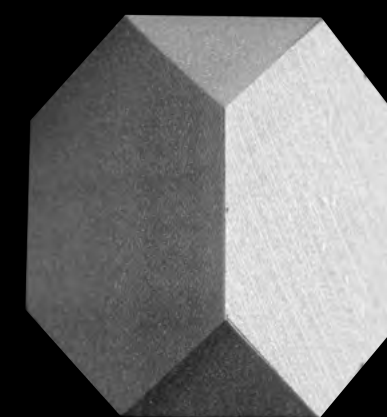
Rys. II. GRUPA HEKSAEDRU; 3 bryły
foremne ścięte: T/T, H/O, O/H

- linia gruba – HEKSAEDR ŚCIĘTY
- linia średnia – TETRAEDR ŚCIĘTY
- linia podwójna cienka – OKTAEDR ŚCIĘTY
- linia cienka – zarysy brył foremnych

II

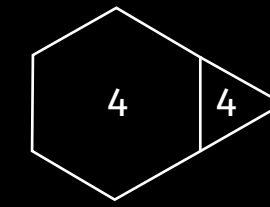
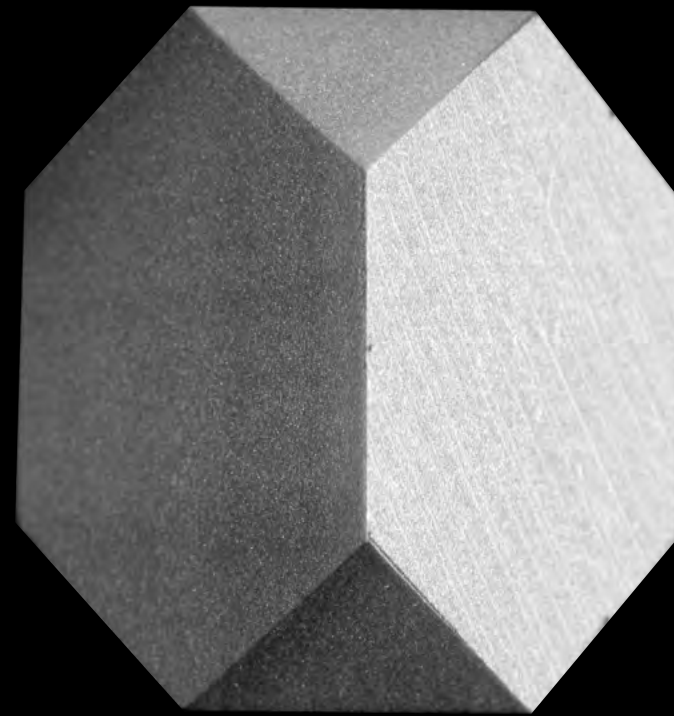
GRUPA HEKSA- EDRU

T/T H/O O/H

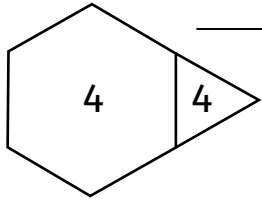


5

TETRAEDR ŚCIĘTY
T/T



TETRAEDR ŚCIĘTY T/T



Powstaje przez ścięcie naroży Tetraedru pod kątem $70^{\circ}32'$, to jest równoległe do przeciwległej ściany o $\frac{1}{3}$ długości krawędzi. Ściany trójkątne stają się sześciobokami foremnymi, a ścięte naroża trójkątami równobocznymi. Odcięte naroża są małymi Tetraedrami. Bryła posiada 8 ścian – 4 sześcioboczne i 4 trójkątne.

Szkielet wewnętrzny T/T tworzy 6 par półprostych wychodzących ze środka bryły pod kątem $50^{\circ}30'$, a leżących na 6 płaszczyznach w 3 parach wzajemnie prostopadłych (rys. 5.1).

Szkielet zewnętrzny tworzy 12 wierzchołków połączonych osiemnastoma krawędziami. W każdym wierzchołku zbiegają się 3 krawędzie pod kątem $64^{\circ}45'$ w stosunku do półprostej łączącej wierzchołek ze środkiem bryły. Kąty dwusienne są następujące: pomiędzy ścianami sześciobocznymi $70^{\circ}32'$, a pomiędzy ścianą trójkątną a sześcioboczną $109^{\circ}28'$ ($35^{\circ}16' + 74^{\circ}12'$). Każda ściana sześcioboczna styka się z trzema sześciobocznymi i trzema trójkątnymi, a każda ściana trójkątna z trzema sześciobocznymi.

Kontur T/T w charakterystycznych rzutach przybiera kształt ośmioboku nieforemnego i dziewięcioboku nieforemnego (rys. 5.2 a, b, c).

Tetraedr ścięty nie ma już tak ostrych rysów jak T. Jego postać jest łagodniejsza, bardziej przyjazna, chociaż zapadanie się w sobie pozostało.

Bryłą dualną do T/T jest tetraedr potrójny¹¹ (fot. 1.8).

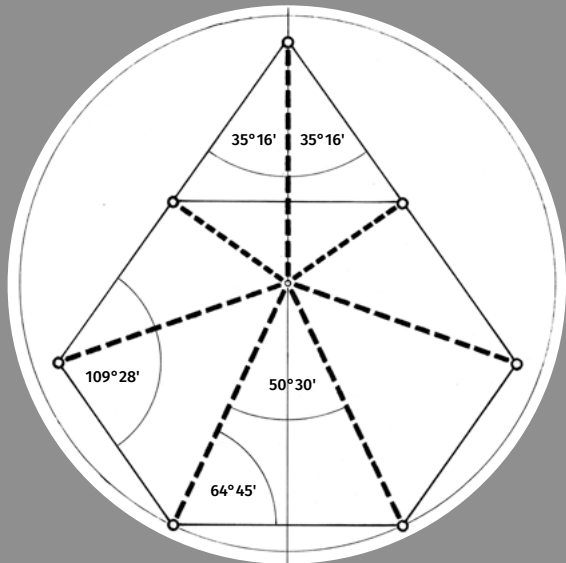
Ortogonalny podział T/T jedną płaszczyzną dzieli bryłę na dwie równe części (fot. 5.2). Łącząc te części ścianą sześcioboczną można uzyskać kilka nowych brył, przekraczając jedną część co 60° (fot. 5.3, 5.4, 5.5).

Skośny podział T/T jedną płaszczyzną pod kątem $54^{\circ}44'$ dzieli bryłę na dwie równe części. Analogicznie jak w przypadku T – kształt przekroju będzie kwadratem, co pozwoli na przekształcenie T/T przez obrót jednej części o 90° w nową bryłę – bliźniak T/T (fot. 5.6, 5.7). Skośny podział dwiema płaszczyznami dzieli bryłę na 4 równe części (fot. 5.8), z których składać można inne bryły (fot. 5.9).

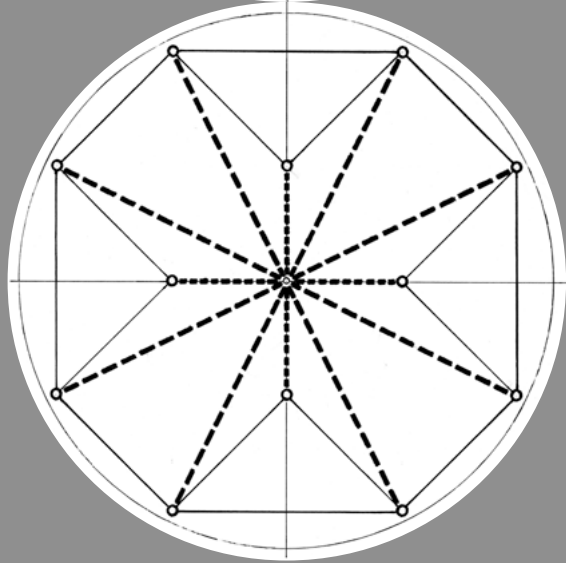
Strukturalny podział T/T rozбивa bryłę na 8 nierównych ostrosłupów: 4 ostrosłupy sześcioboczne o kątach $35^{\circ}16'$ przy podstawie i $146^{\circ}15'$ między ścianami bocznymi oraz 4 ostrosłupy trójkątne o kątach $74^{\circ}12'$ przy podstawie i $67^{\circ}30'$ między ścianami bocznymi (fot. 5.10). Łącząc dwa różne ostrosłupy ścianami bocznymi uzyskujemy $\frac{1}{4}$ T/T, a łącząc 2 takie pary uzyskujemy $\frac{1}{2}$ T/T (fot. 5.11, 5.12).

T/T w całości lub w częściach może wchodzić w różne konfiguracje z innymi bryłami z grupy Heksaedru łącząc się z nimi, bądź z ich częściami ścianą sześcioboczną lub kwadratową. Dwa monolity T/T można złączyć ścianami sześciobocznymi w taki sposób, aby ściana trójkątna była przedłużeniem ściany sześciobocznej (fot. 5.13).

a

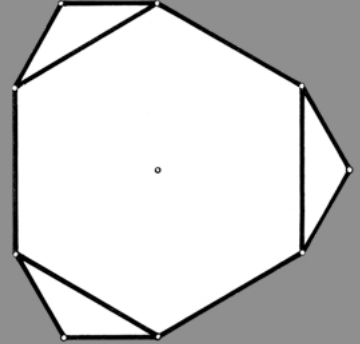


b

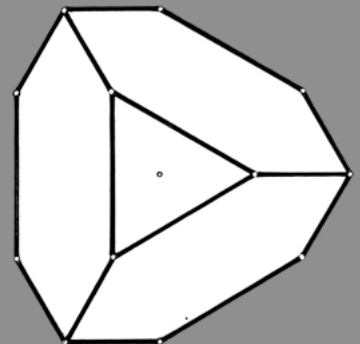


Rys. 5.1 TETRAEDR ŚCIĘTY, szkielet wewnętrzny z kątami w dwóch rzutach.

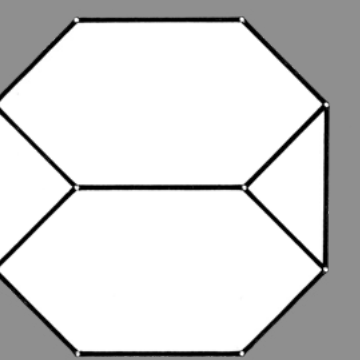
a



b

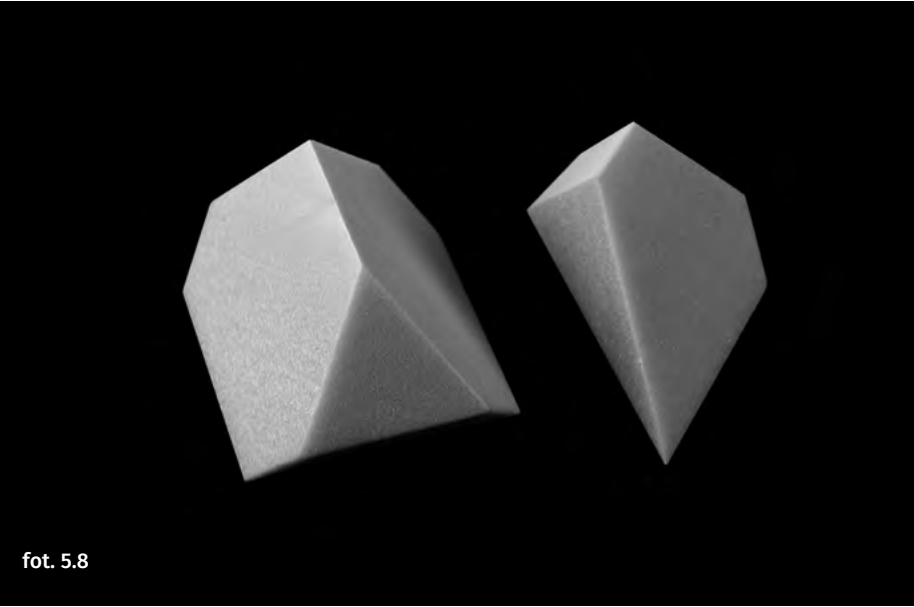
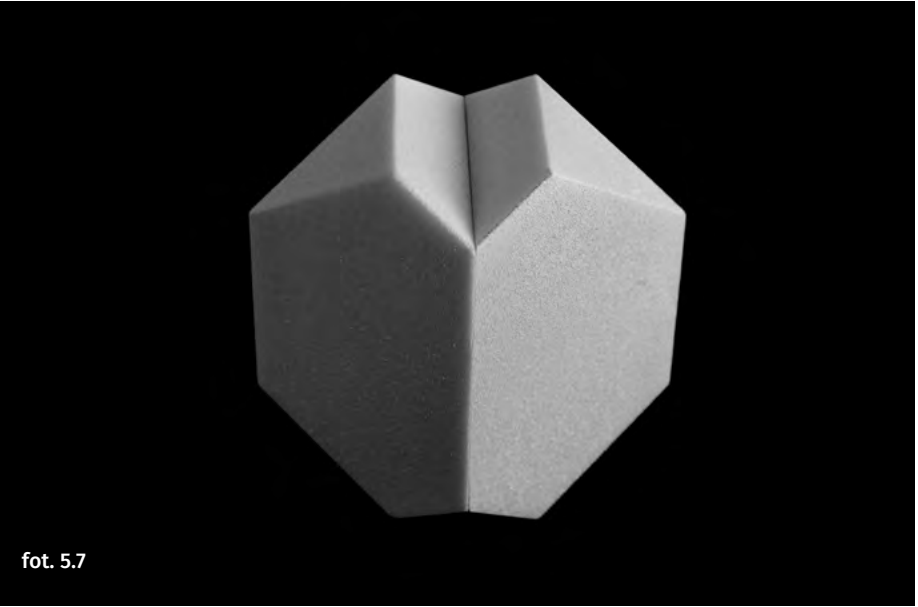
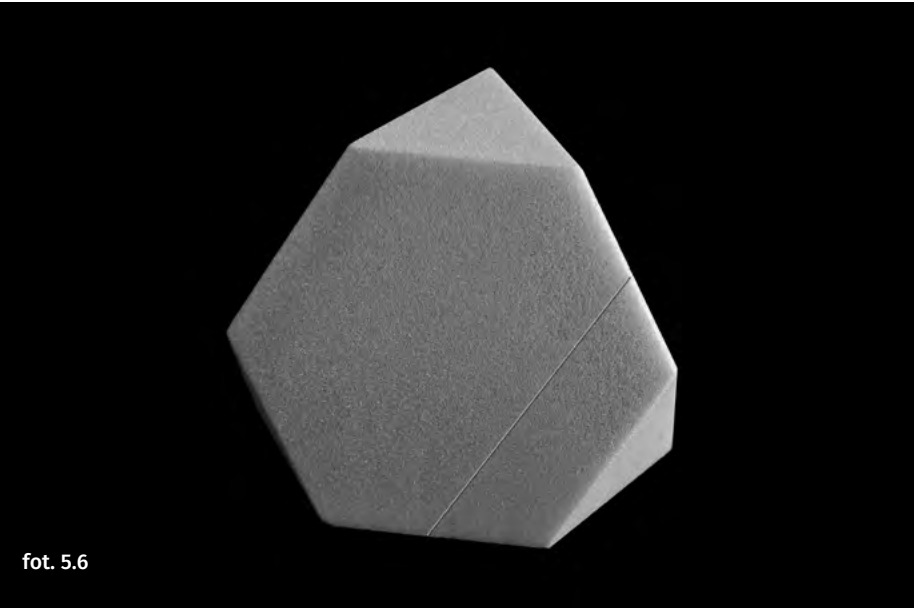
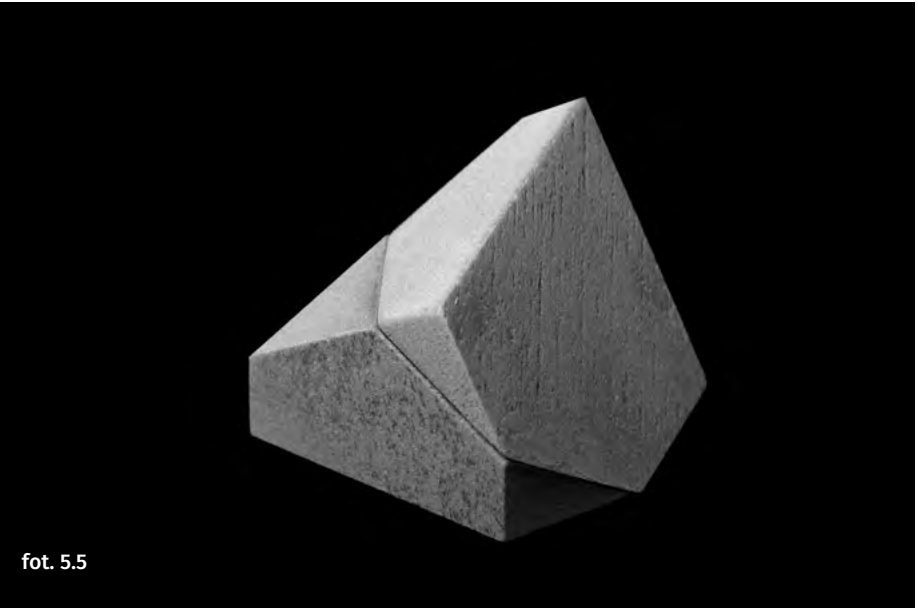
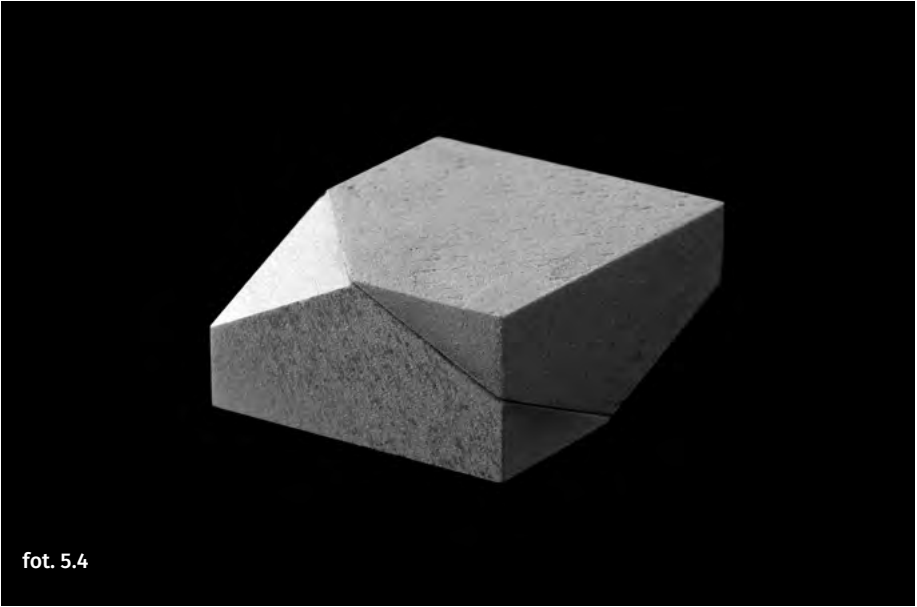
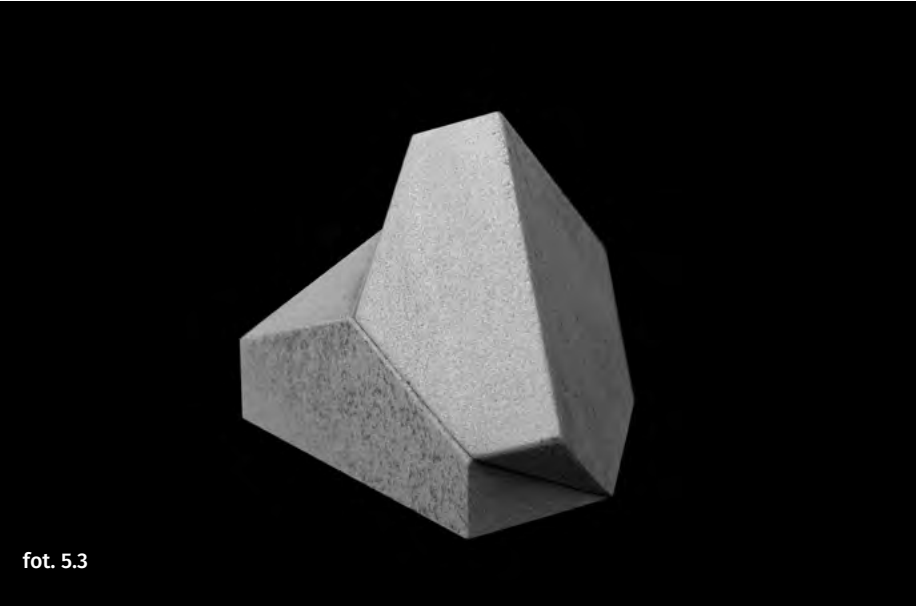
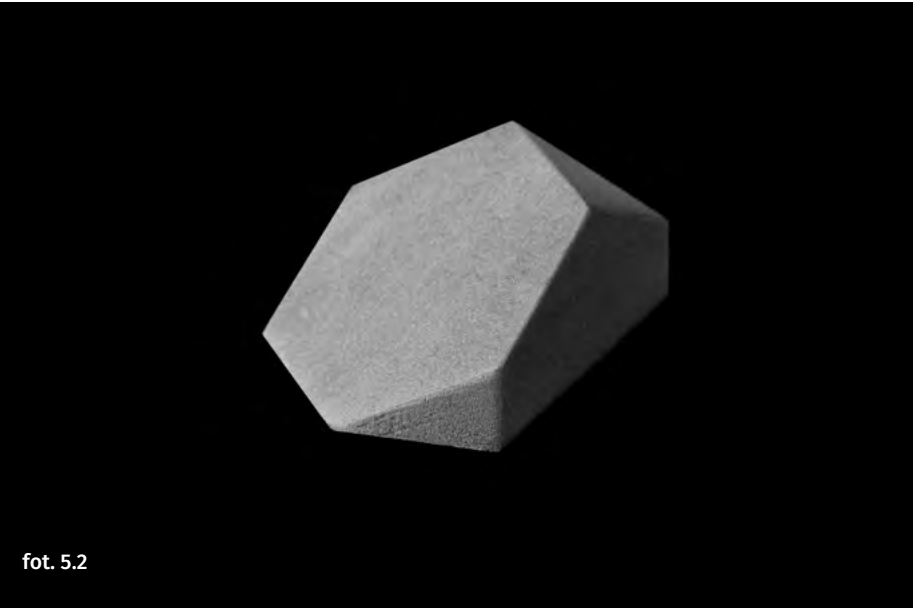
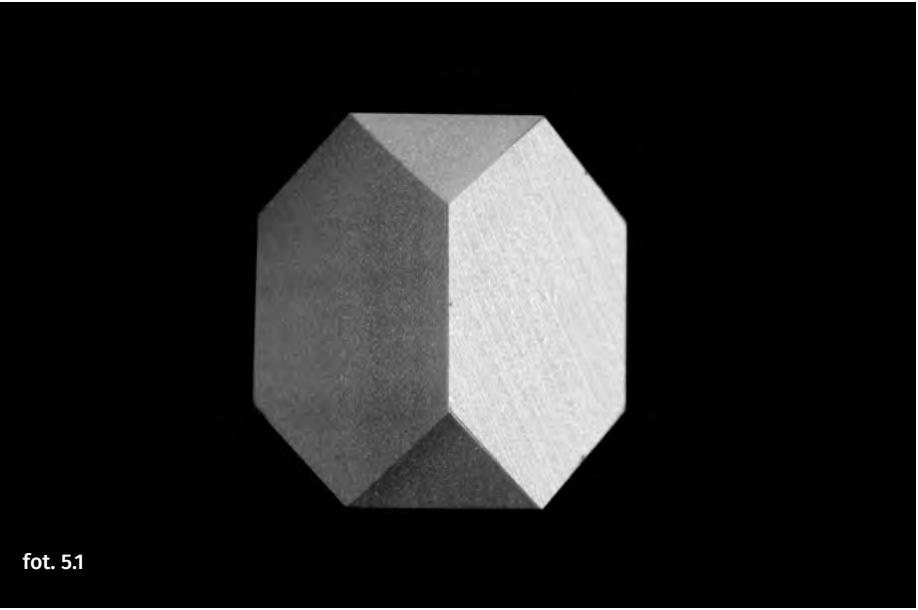


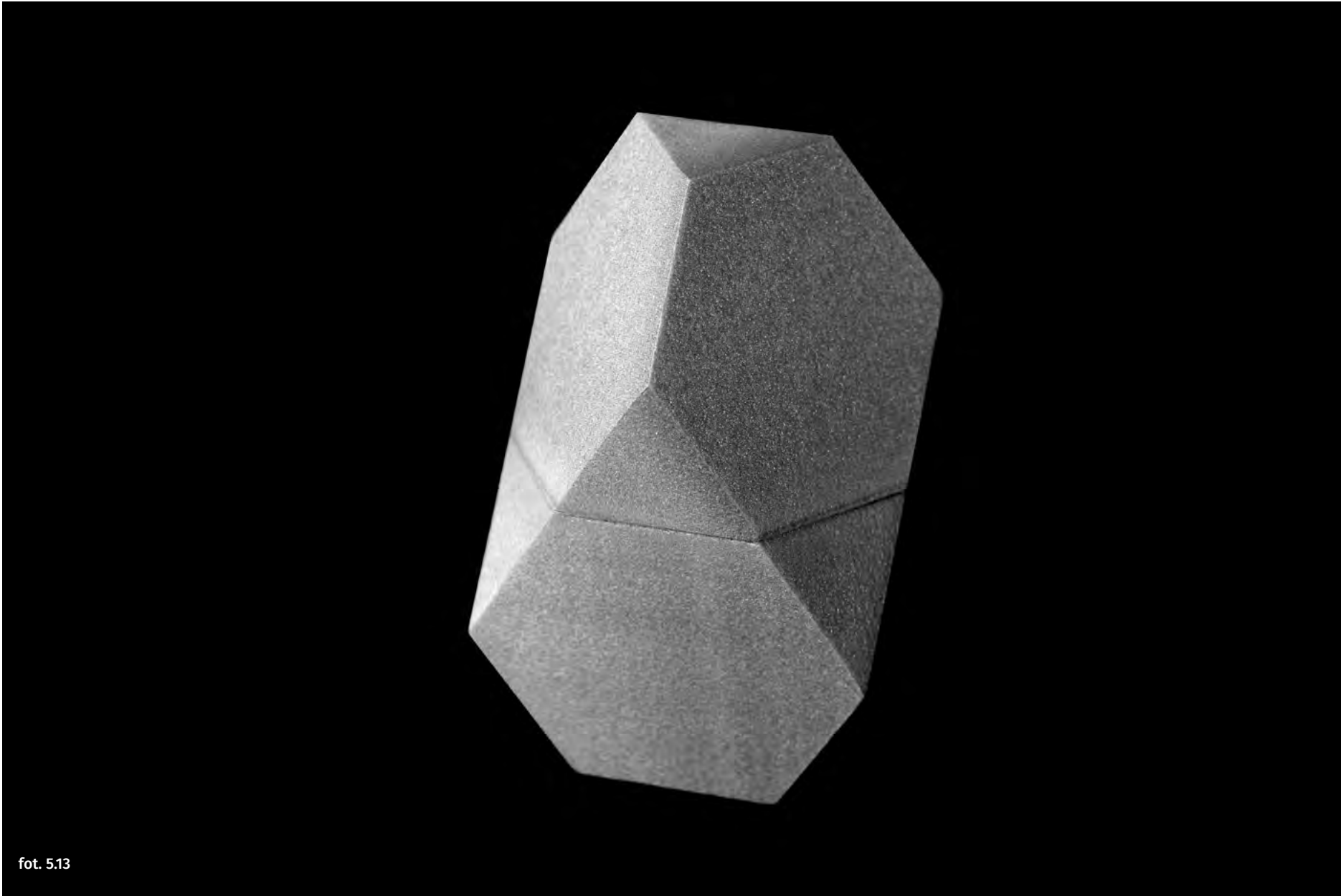
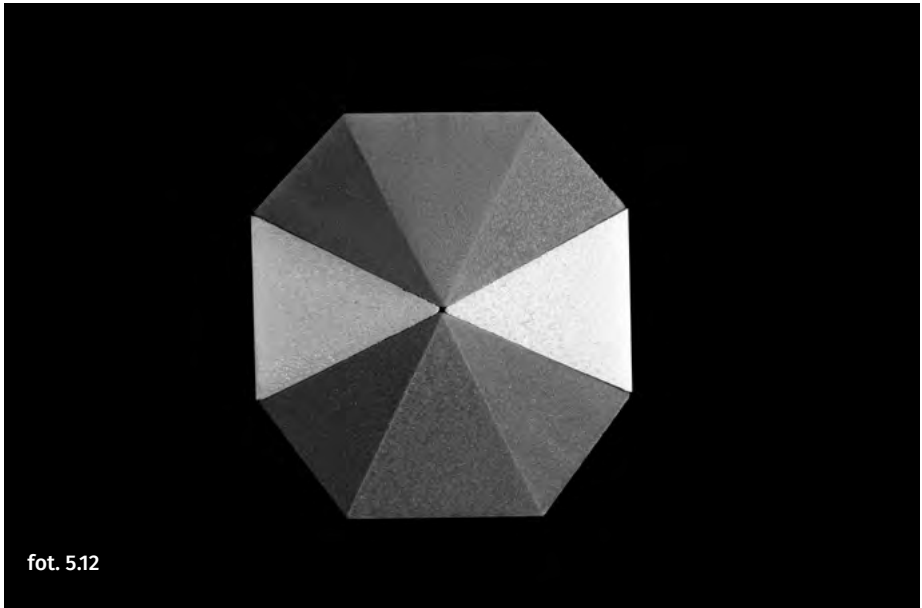
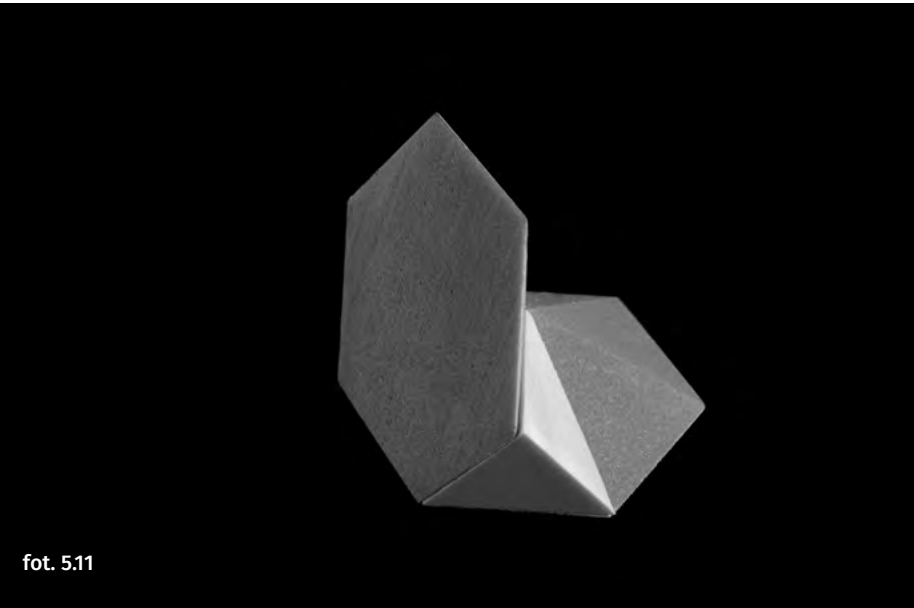
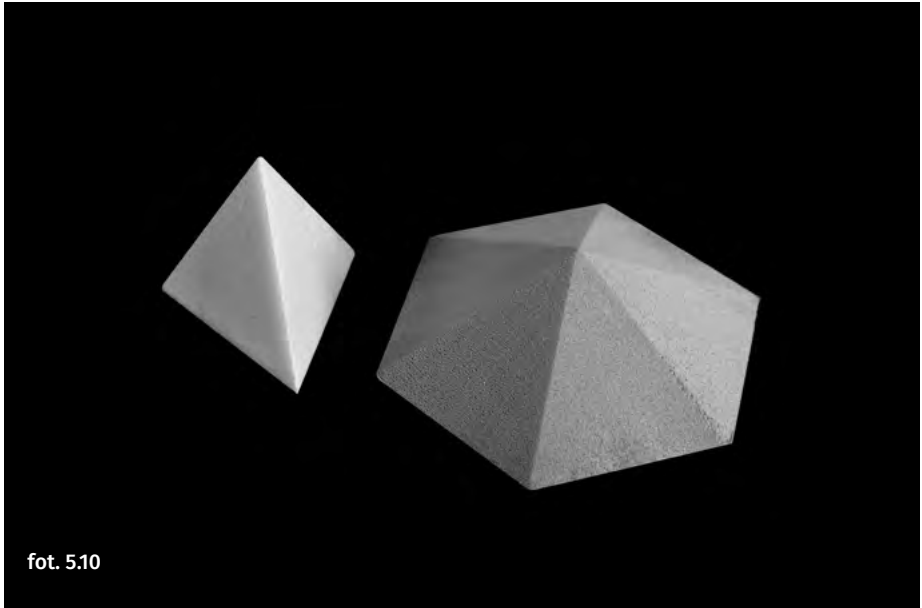
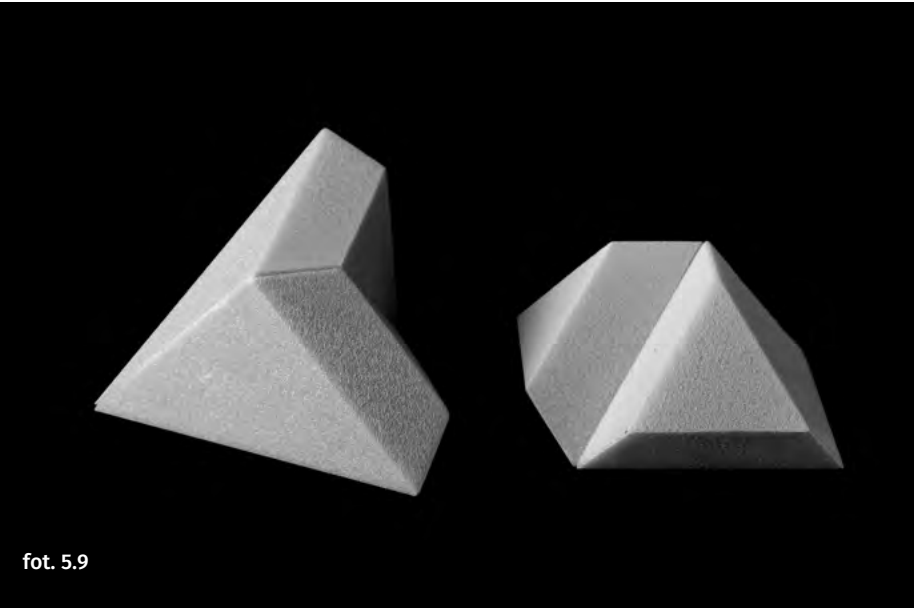
c

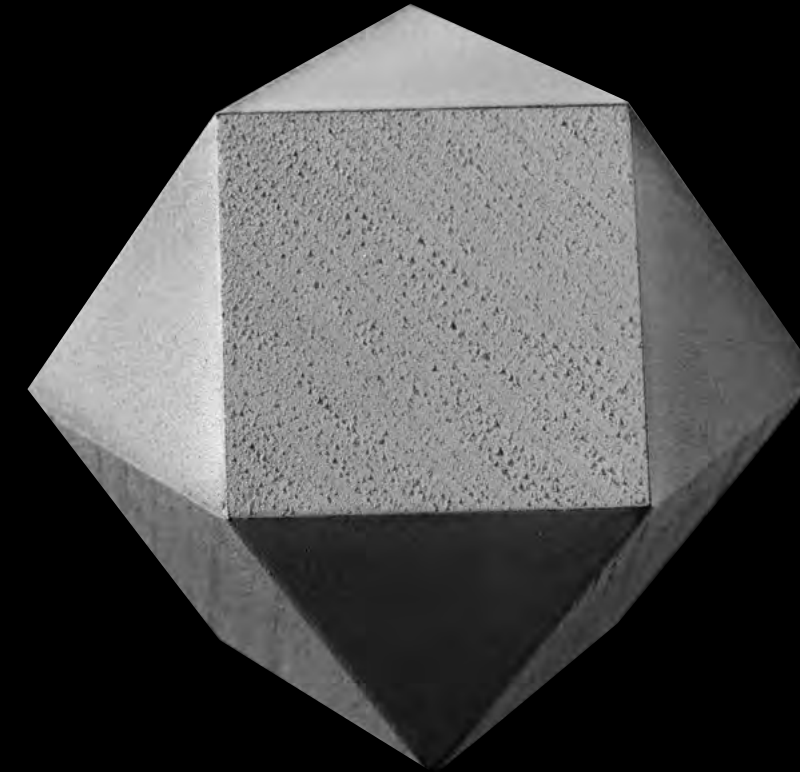


Rys. 5.2 TETRAEDR ŚCIĘTY, szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony naroża ściętego c) od strony krawędzi.

11 Galeria Wielościanów – str. 85

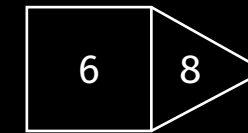






6

HEKSAEDR ŚCIĘTY
H/0
Sześćcioośmiościan



HEKSAEDR ŚCIĘTY H/O

Sześćcioośmościan

6

8

Powstaje przez ścięcie naroży Heksaedru pod kątem $54^{\circ}44'$ do połowy długości jego krawędzi. Można go także otrzymać przez ścięcie naroży Oktaedru do połowy długości jego krawędzi operując tym samym kątem. H/O stanowi część wspólną obu przenikających się brył foremnych. Jest to czternastościan – bryła półforemna, na której można opisać sferę. Ścięte naroże H jest ósmą częścią O, więc ze wszystkich ściętych naroży H, można złożyć cały Oktaedr.

Szkielet wewnętrzny H/O tworzą 3 pary prostych, przecinających się w środku pod kątem 90° , a leżących na trzech płaszczyznach wzajemnie prostopadłych. Natomiast na płaszczyźnie skośnej leżą 3 proste, które przecinają się w środku pod kątem 60° (rys. 6.1 c).

Szkielet zewnętrzny tworzy 12 wierzchołków połączonych dwudziestomaczerema krawędziami. W każdym wierzchołku zbiegają się 4 krawędzie pod kątem 60° w stosunku do przekątnej bryły. Przeciwległe ściany układają się w pary wzajemnie równoległe. Ściany kwadratowe w 3 pary, a ściany trójkątne w 4 pary, przy czym ściany trójkątne są wzajemnie przekręcone o 60° wokół osi przechodzącej przez ich środki. Kąt dwuścienny wynosi $125^{\circ}16'$ ($54^{\circ}44' + 70^{\circ}32'$) (rys. 6.1 a).

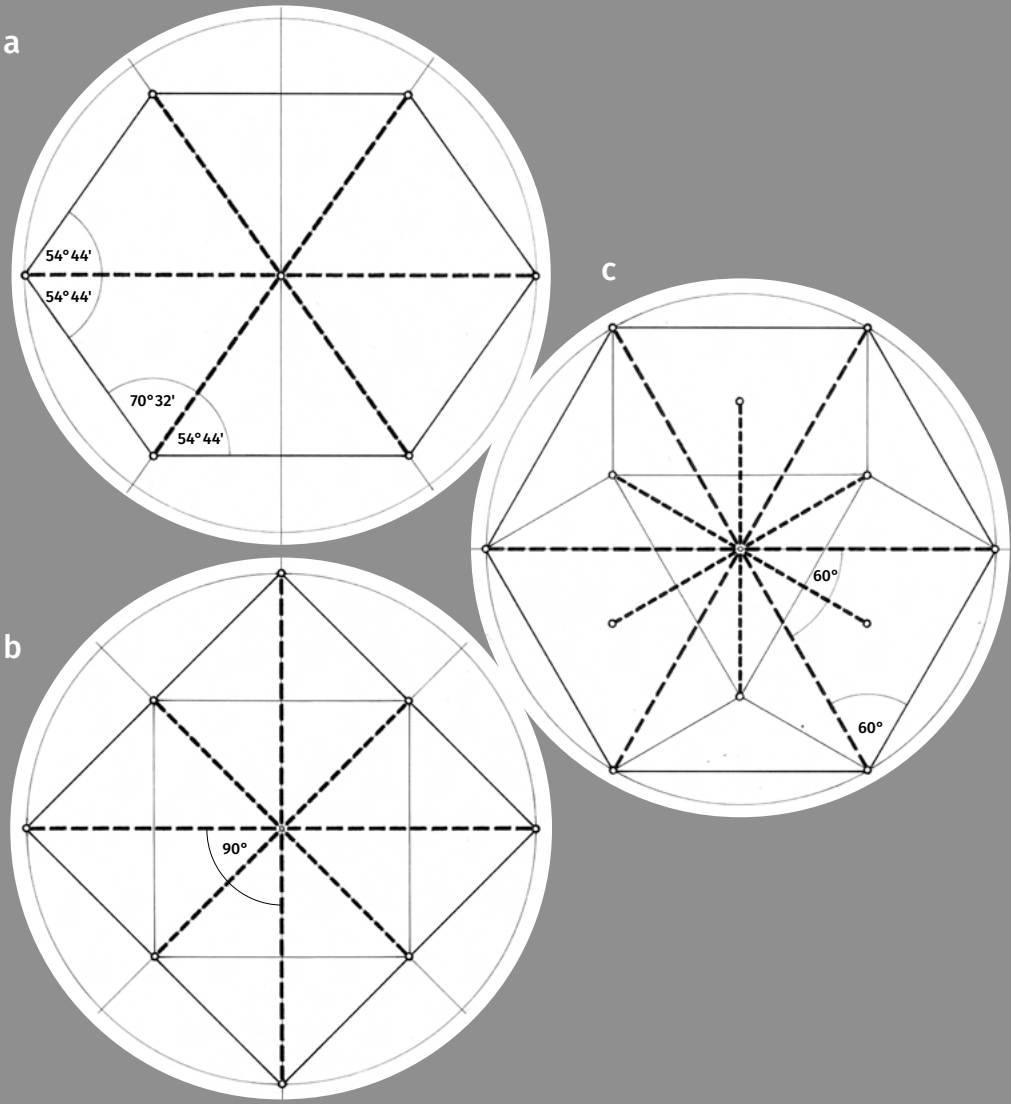
Kontur H/O w charakterystycznych rzutach przybiera kształt kwadratu, sześcioboku nieforemnego i sześcioboku foremnego (rys. 6.2 a, b, c).

Bryłą dualną do H/O jest sześcian poczwórny¹².

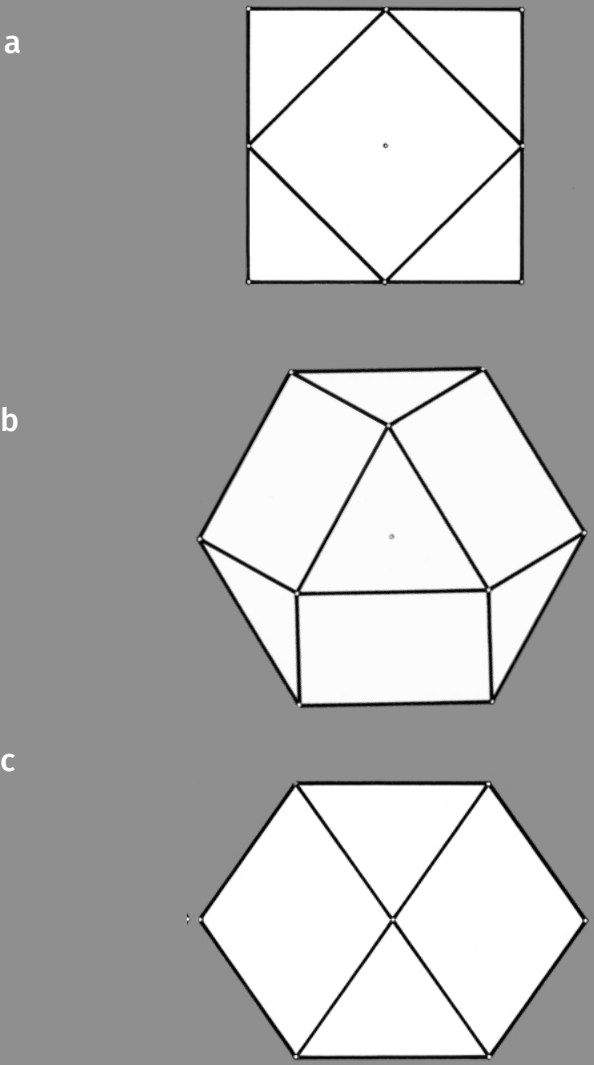
Ortogonalny podział H/O po przekątnych ścian kwadratowych daje nam równe części: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{8}$ (fot. 6.2). Z ósmych części H/O można zbudować Heksaedr z wpisanym weń Oktaedrem w postaci pustej przestrzeni. Z połowy H/O i z połowy Φ można złożyć hybrydę (fot. 6.5).

Skośny podział H/O jedną płaszczyzną pod kątem $54^{\circ}44'$ daje ten sam efekt, co skośny podział H tym samym kątem. Przekrój jest sześciobokiem foremnym, co umożliwia przekształcenie H/O w bryłę o takich samych własnościach, ale innym układzie ścian obwodowych. Teraz trójkąty stykają się z trójkątami, a kwadraty z kwadratami (fot. 6.3). Z $\frac{1}{2}$ skośnej H/O i $\frac{1}{2}$ skośnej O można złożyć hybrydę (fot. 6.4). Skośny podział H/O czterema płaszczyznami będzie w tym przypadku podziałem strukturalnym, który rozbije całość na 14 nierównych ostrosłupów. 8 z nich to Tetraedry, a 6 z nich to piramidy, czyli połowy Oktaedrów. Z jednostek strukturalnych złożymy nierówne części bryły (fot. 6.7, 6.8). Równe mogą być tylko połowy H/O złożone z trzech piramid i czterech Tetraedrów (fot. 6.9).

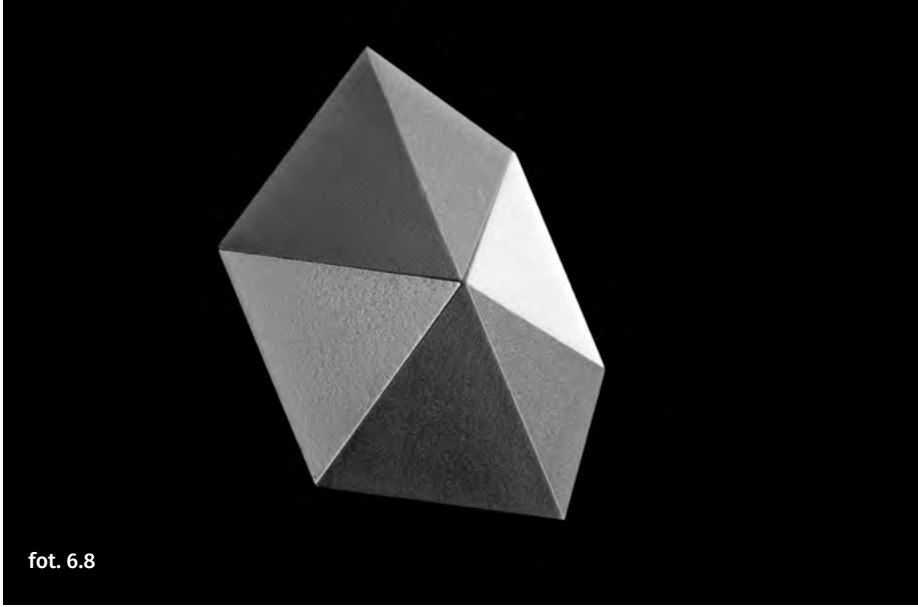
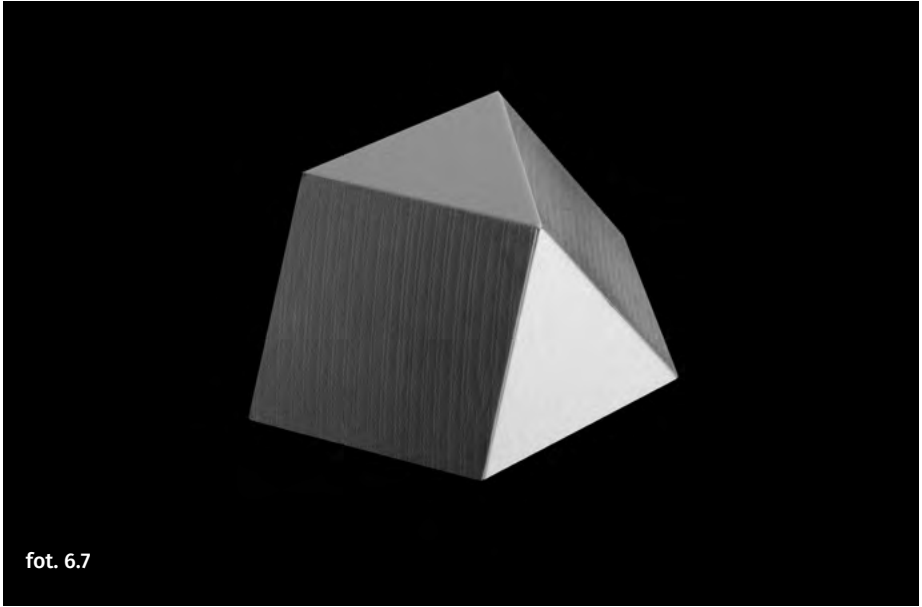
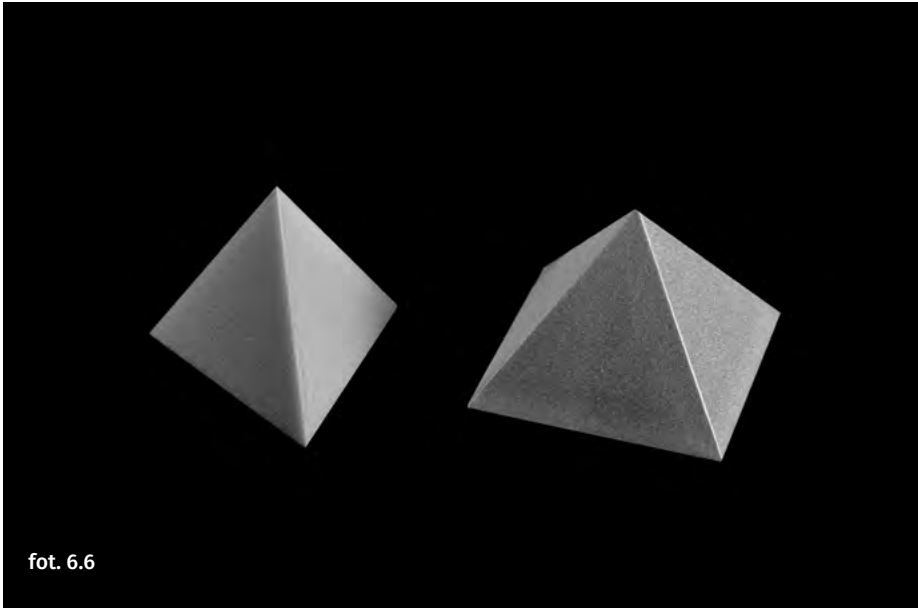
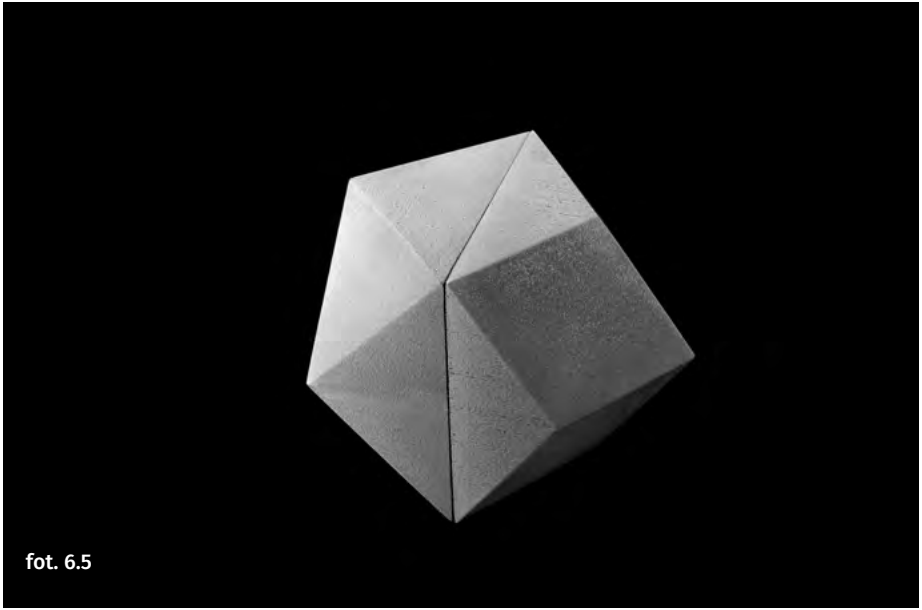
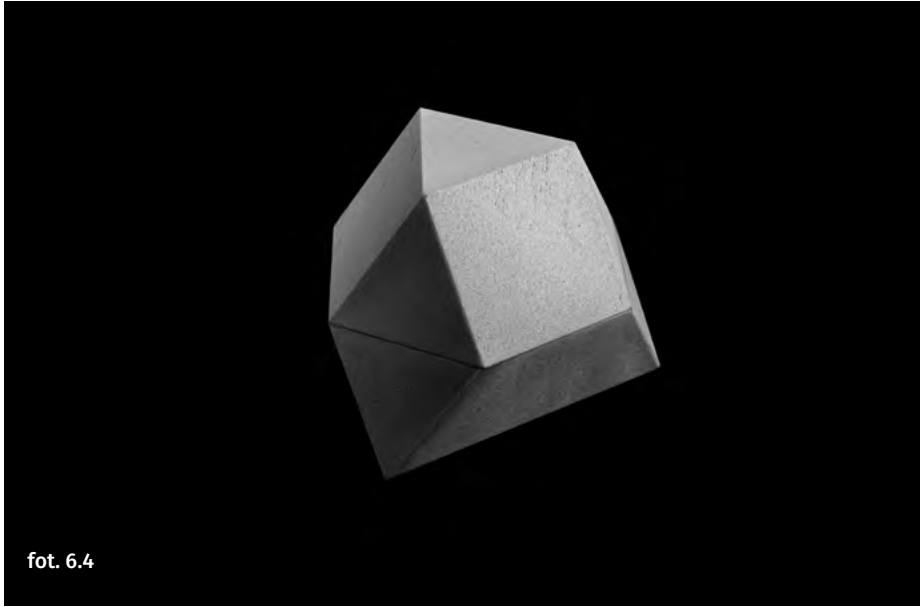
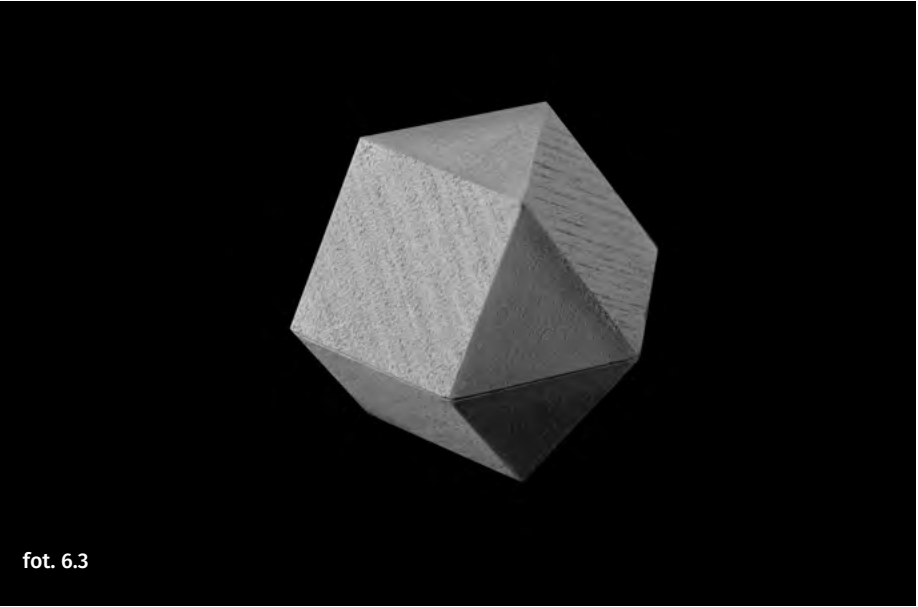
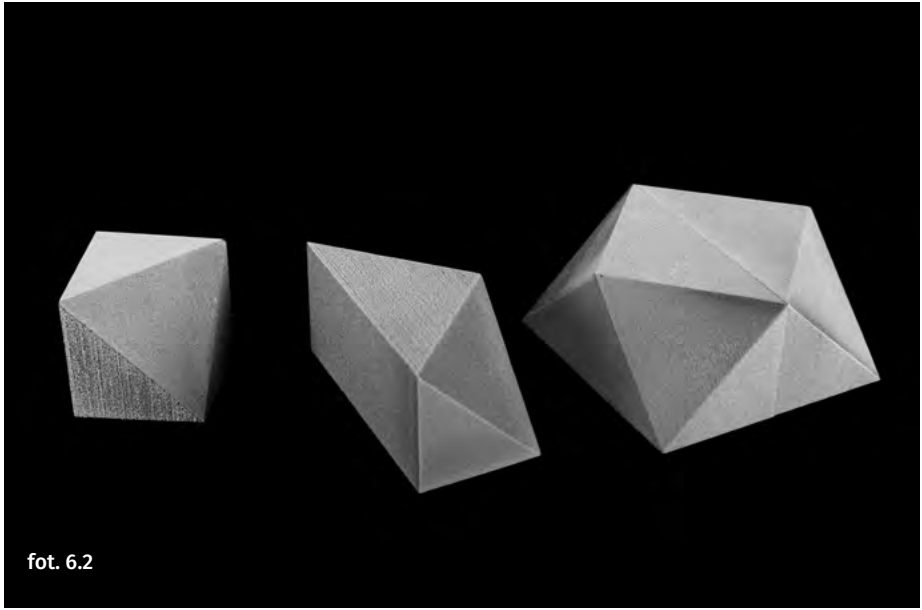
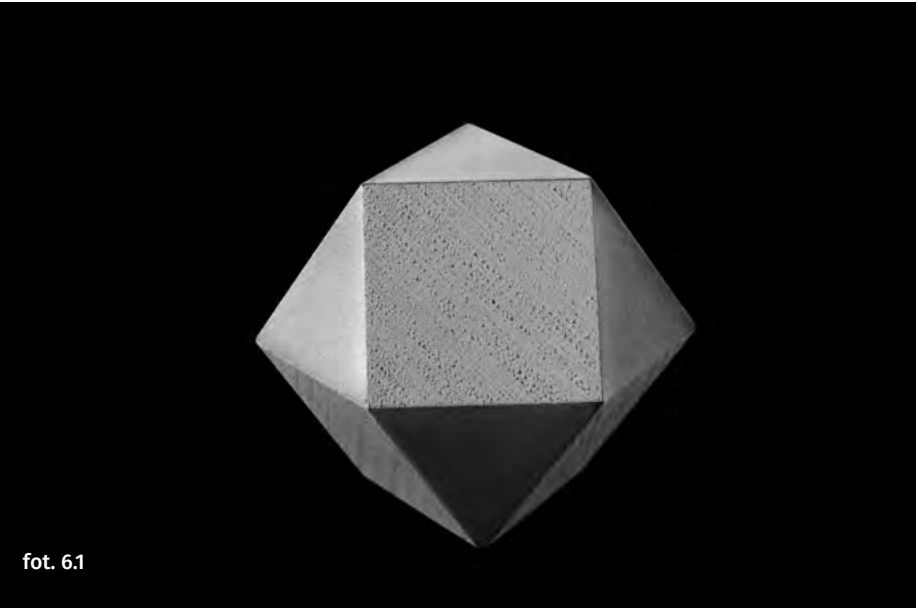
Warto zauważyć, że z jednostek strukturalnych H/O można zbudować Oktaedr. Gdy do $\frac{1}{2}$ strukturalnej H/O dodamy 3 piramidy to otrzymamy $\frac{1}{2}$ skośną O (fot. 6.10) ($\rightarrow$ Skośny podział O czterema płaszczyznami: fot. 3.8, 3.9).

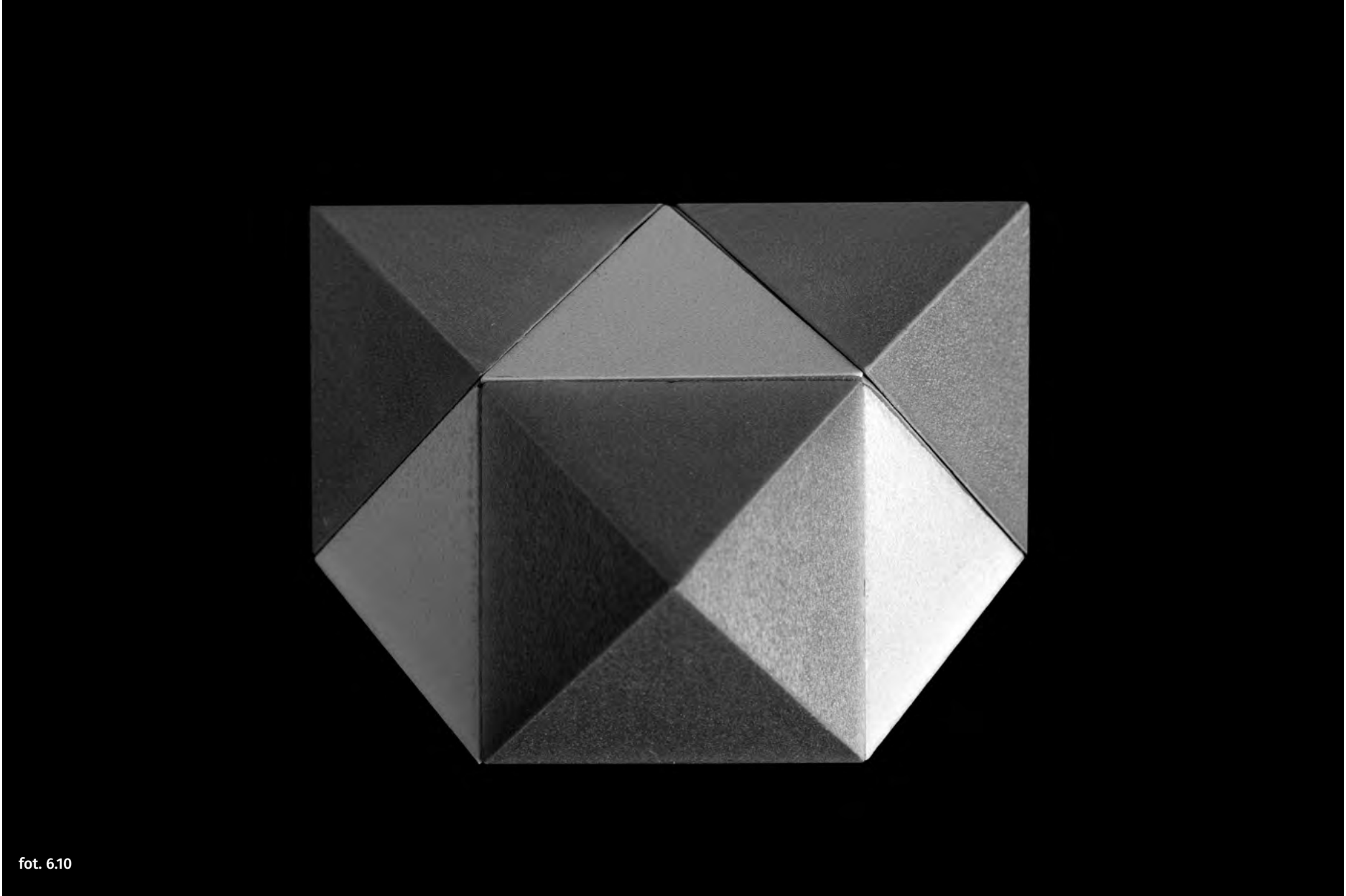
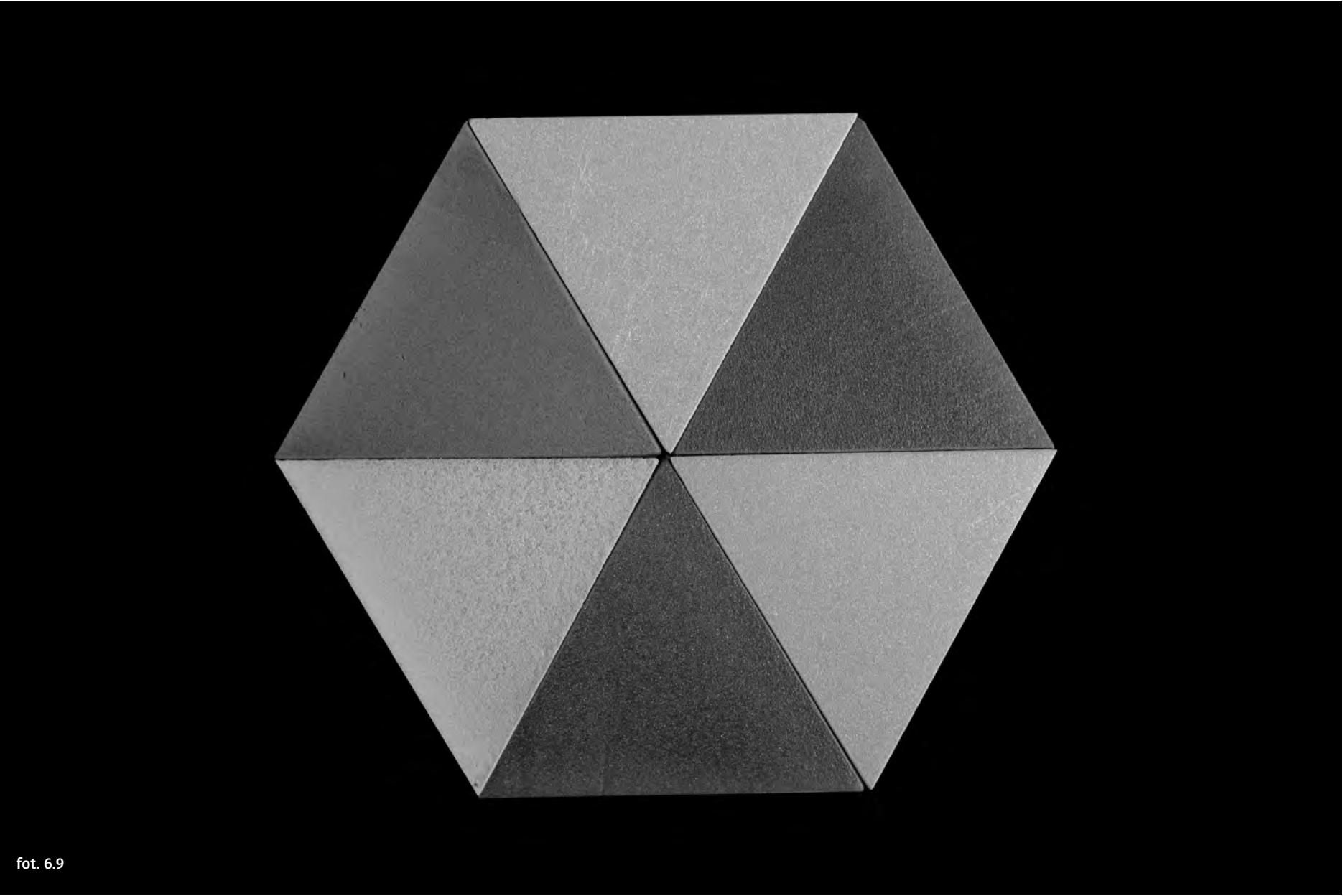


Rys. 6.1 HEKSAEDR ŚCIĘTY, szkielet wewnętrzny z kątami w trzech rzutach.



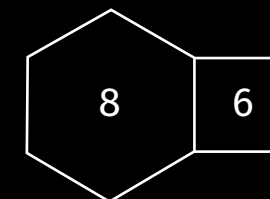
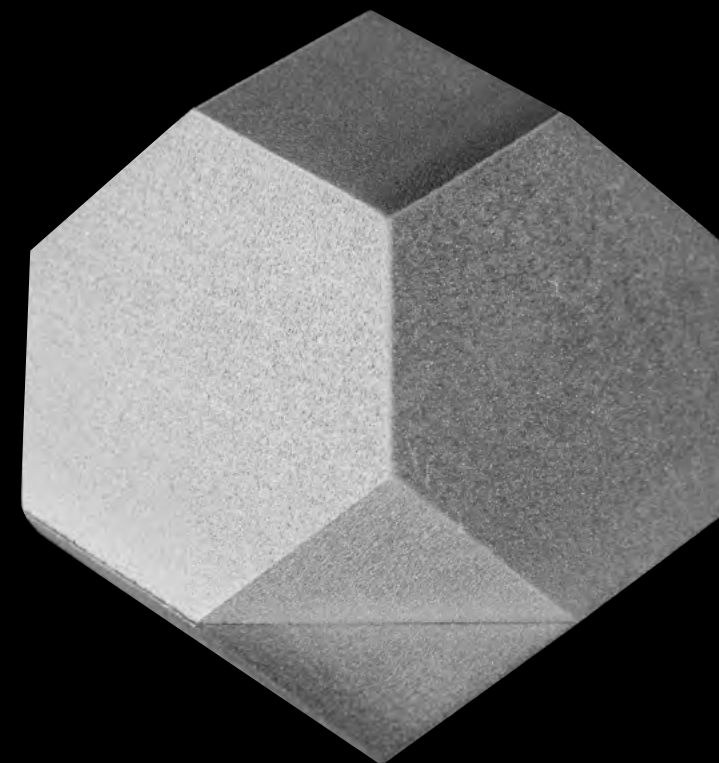
Rys. 6.2 HEKSAEDR ŚCIĘTY, szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony naroża ściętego c) od strony wierzchołka.





7

OKTAEDR ŚCIĘTY
O/H



OKTAEDR ŚCIĘTY O/H

Ośmiosześcian

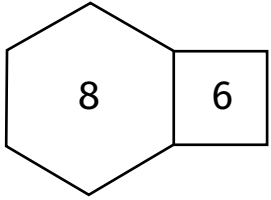
Powstaje przez ścięcie naroży Oktaedru pod kątem $54^{\circ}44'$ (prostopadłe do przekątnej bryły) o $\frac{1}{3}$ długości jego krawędzi. Ściany trójkątne stają się sześciobokami foremnymi, a ścięte naroża kwadratami. Ścięte naroża są piramidami, z których można złożyć 3 małe Oktaedry. Bryła jest czternastościanem półforemnym, na którym można opisać sferę. Szkielet wewnętrzny O/H tworzy 6 par prostych przecinających się w środku pod kątem 37° , po dwie pary na każdej z trzech płaszczyzn wzajemnie prostopadłych (rys. 7.1).

Szkielet zewnętrzny O/H tworzą 24 wierzchołki połączone trzydziestoma sześcioma krawędziami. W każdym wierzchołku zbiegają się 3 krawędzie pod kątem $71^{\circ}30'$ w stosunku do przekątnej bryły. Przeciwległe ściany układają się w pary wzajemnie równoległe. Ściany kwadratowe w 3 pary, a ściany sześcioboczne w 4 pary. Kąty dwuscienne są następujące: pomiędzy ścianami sześciobocznymi $109^{\circ}28'$ ($2 \times 54^{\circ}44'$), a między ścianą kwadratową i sześcioboczną $125^{\circ}16'$ ($54^{\circ}44' + 70^{\circ}32'$) (rys. 7.1 a).

Kontur O/H w charakterystycznych rzutach przybiera kształt sześcioboku nieforemnego, ośmioboku nieforemnego i dwunastoboku nieforemnego (rys. 7.2 a, b, c).

Bryłą dualną do O/H jest Dwunastościan rombowy Φ .

Oktaedr ścięty, podobnie jak jego bryła dualna – posiada specjalną i nieoczywistą własność wypełniania przestrzeni. Przy wielowarstwowej



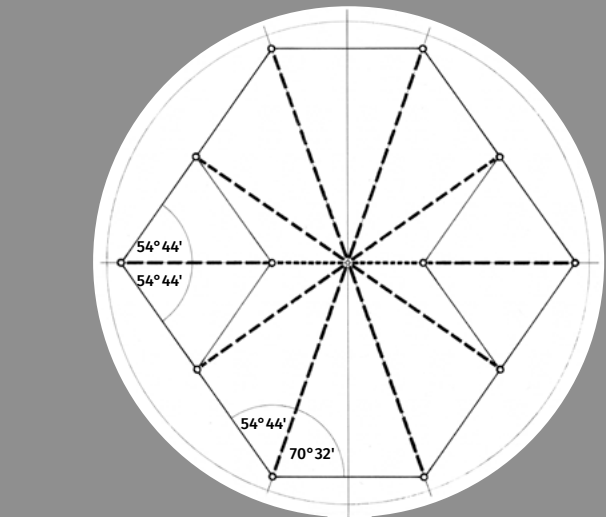
zabudowie przestrzeni każda bryła może stykać się z czternastoma sąsiednimi¹³ (fot. 7.9).

Ortogonalny podział O/H po przekątnych ścian kwadratowych daje równe części: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{8}$ (fot. 7.2). Tu pojawia się ważne spostrzeżenie, że ósma część O/H jest tożsama z połową Heksaedru przeciętego po skosie. Zatem z dwóch takich części można złożyć Heksaedr. To wyjaśnia wspomnianą wyżej nieoczywistą zdolność O/H do pełnej zabudowy przestrzeni (fot. 7.3, 7.4). Wskazuje tym samym na inny sposób realizacji monolitu O/H. Bryłą wyjściową może być także Heksaedr. Ścinamy jego naroża pod kątem $54^{\circ}44'$ wzdłuż czterech linii wyznaczonych na przeciwległych ścianach. Linie te mają być równoległe do obu przekątnych kwadratu i oddalone od jego środka o $\frac{1}{3}$ długości przekątnej. Ścięte naroża przybierają kształt sześcioboków foremnych, a na środkach ścian H pozostają mniejsze kwadraty przekręcone o kąt 45° . Bok małego kwadratu jest równy $\frac{1}{4}$ długości przekątnej ściany H.

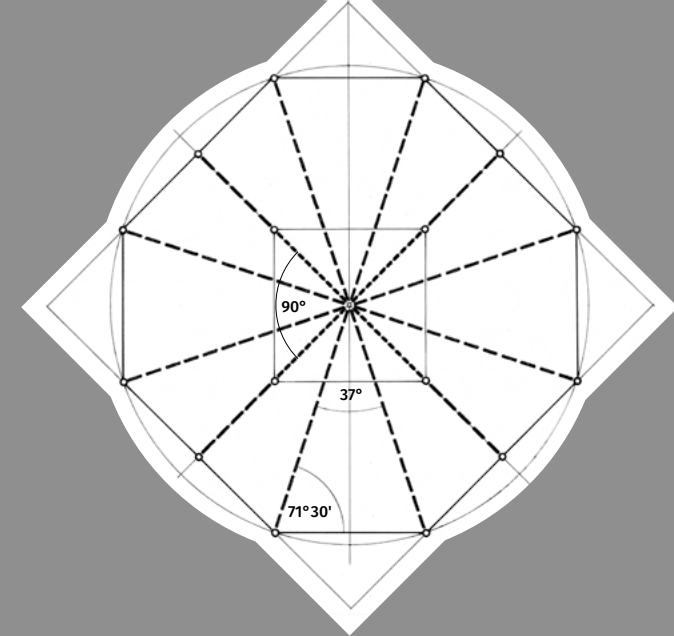
Strukturalny podział O/H rozbija całość na 14 nierównych ostrosłupów: 8 o podstawie sześcioboku i kątach $54^{\circ}44'$ przy podstawie i $131^{\circ}30'$ między ścianami bocznymi oraz 6 o podstawie kwadratu i kątach $70^{\circ}32'$ przy podstawie i 97° między ścianami bocznymi (fot. 7.5). Z jednostek takich można składać nierówne części bryły (fot. 7.6). Równe mogą być tylko połowy O/H złożone z czterech ostrosłupów sześciobocznych i trzech ostrosłupów kwadratowych (fot. 7.7, 7.8).

13 *Kalejdoskop matematyczny* – str. 180, 201

a

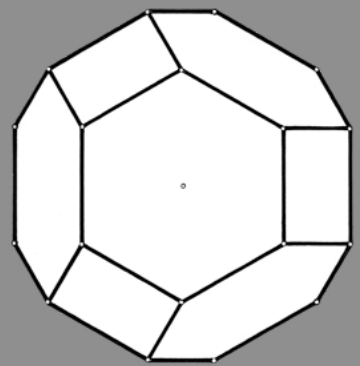


b

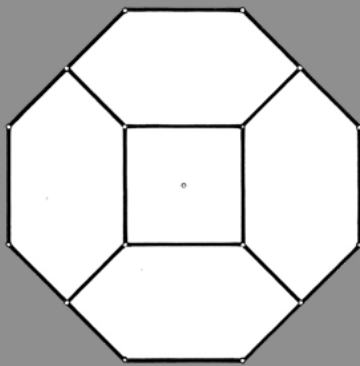


Rys. 7.1 OKTAEDR ŚCIĘTY, szkielet wewnętrzny z kątami w dwóch rzutach.

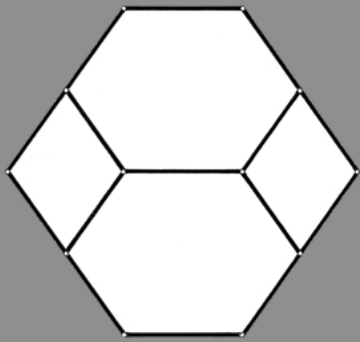
a



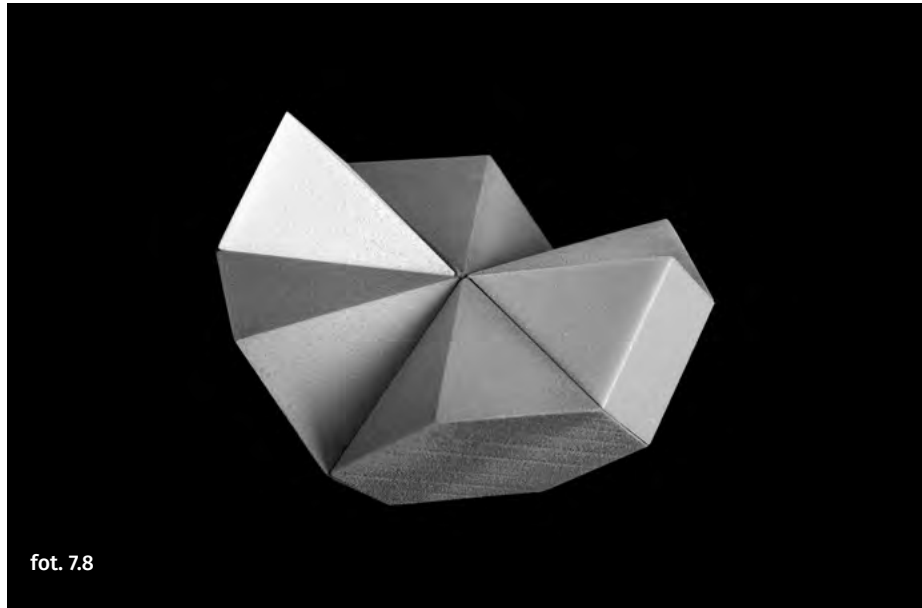
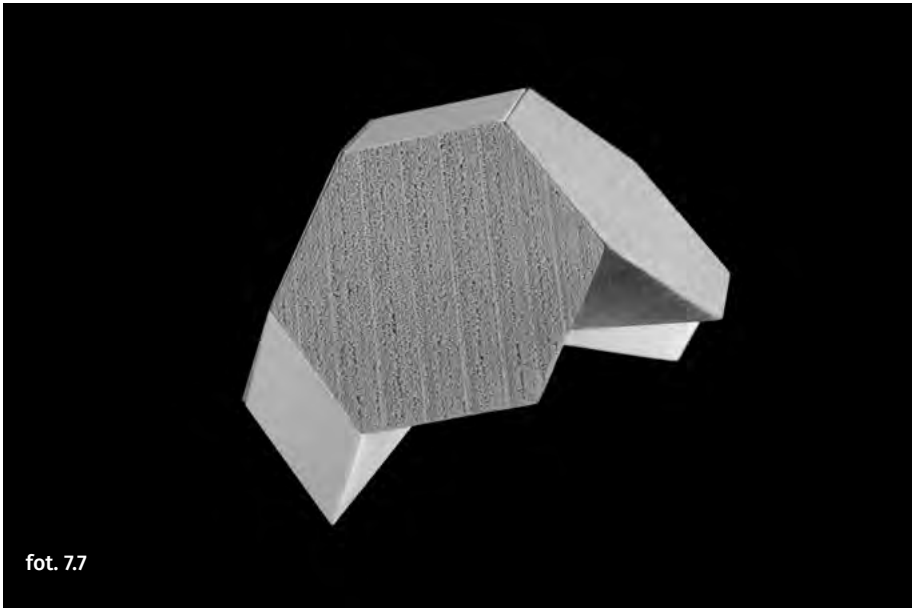
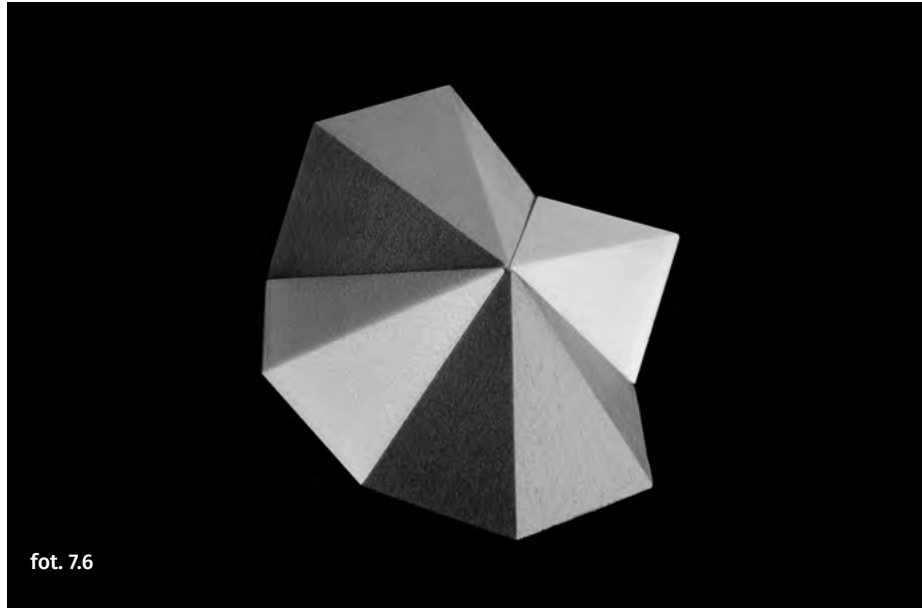
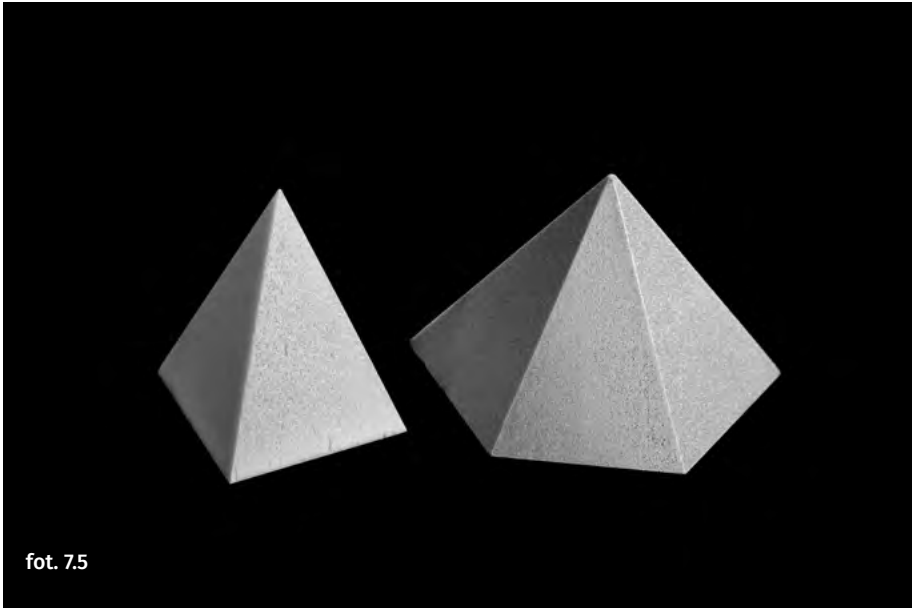
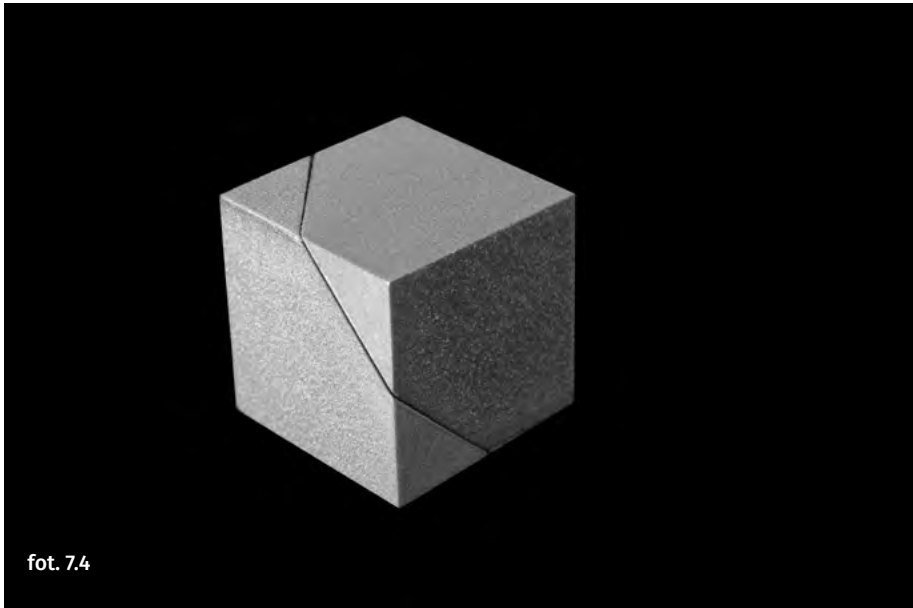
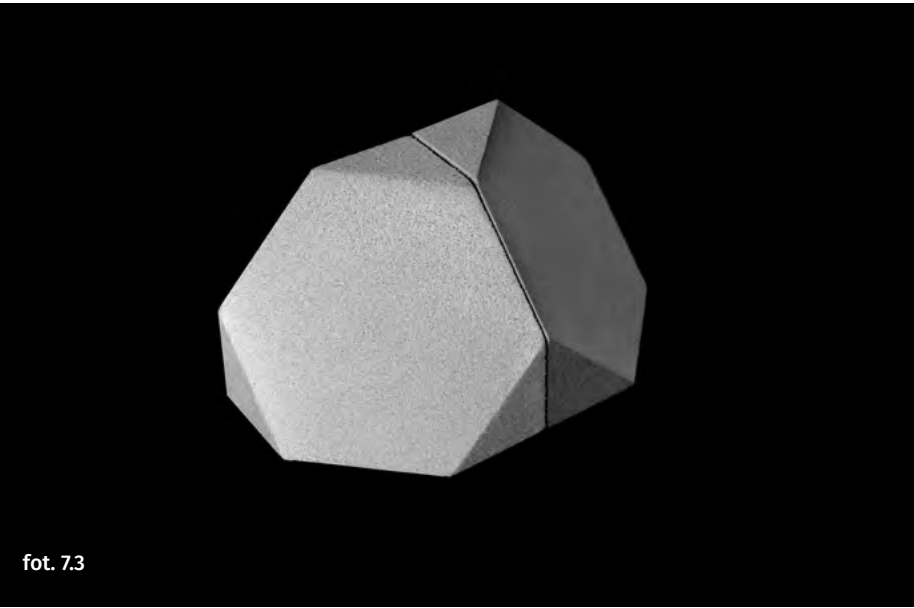
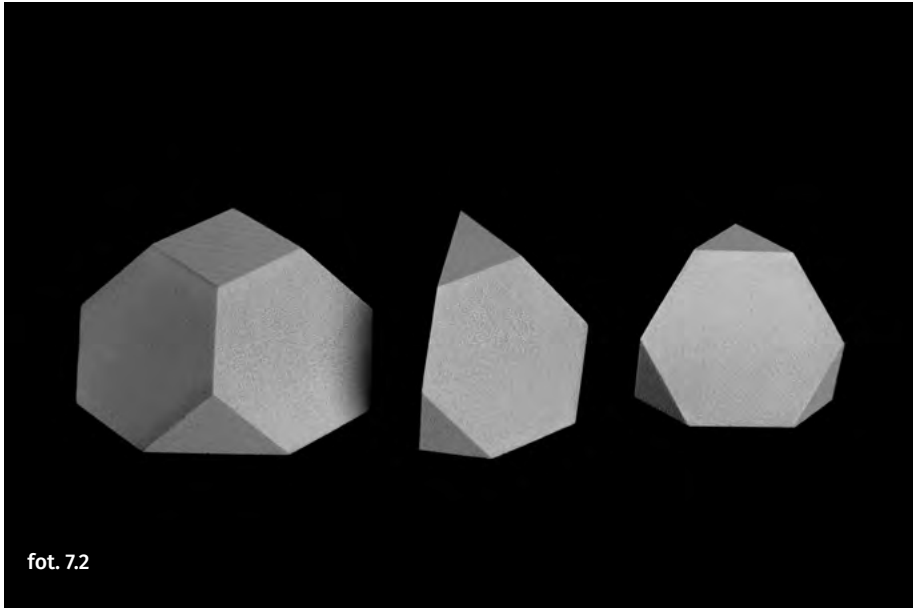
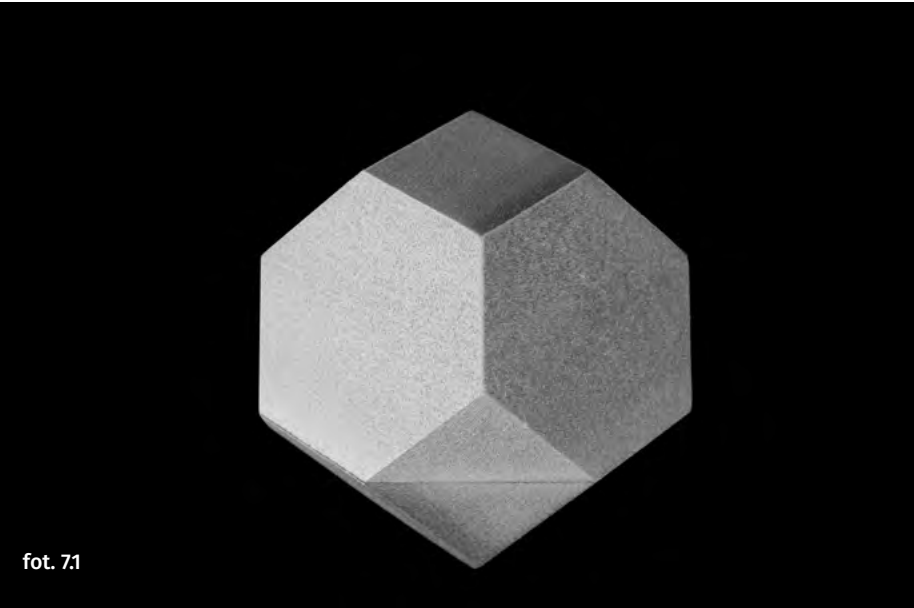
b

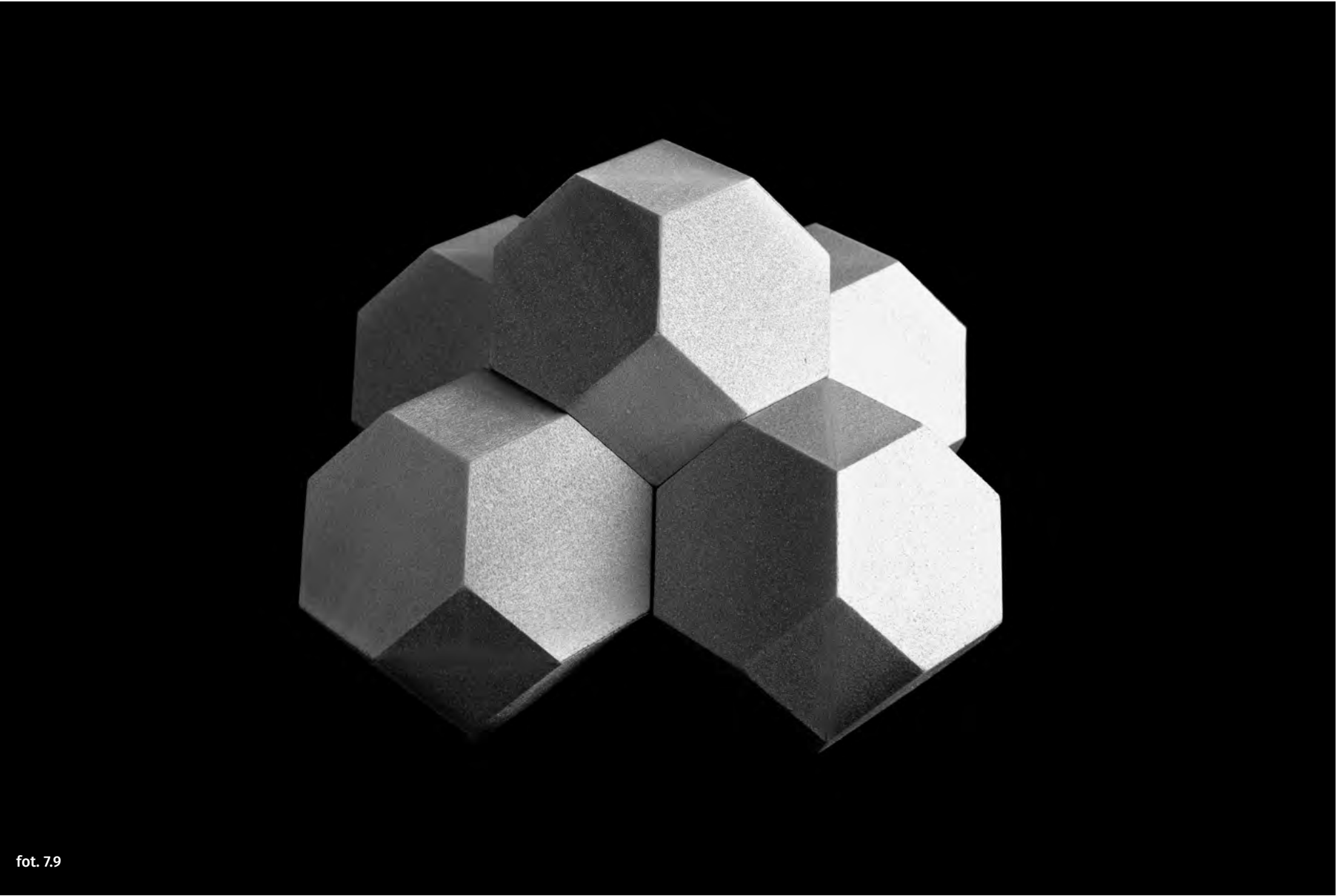


c



Rys. 7.2 OKTAEDR ŚCIĘTY, szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony naroża ściętego c) od strony krawędzi.

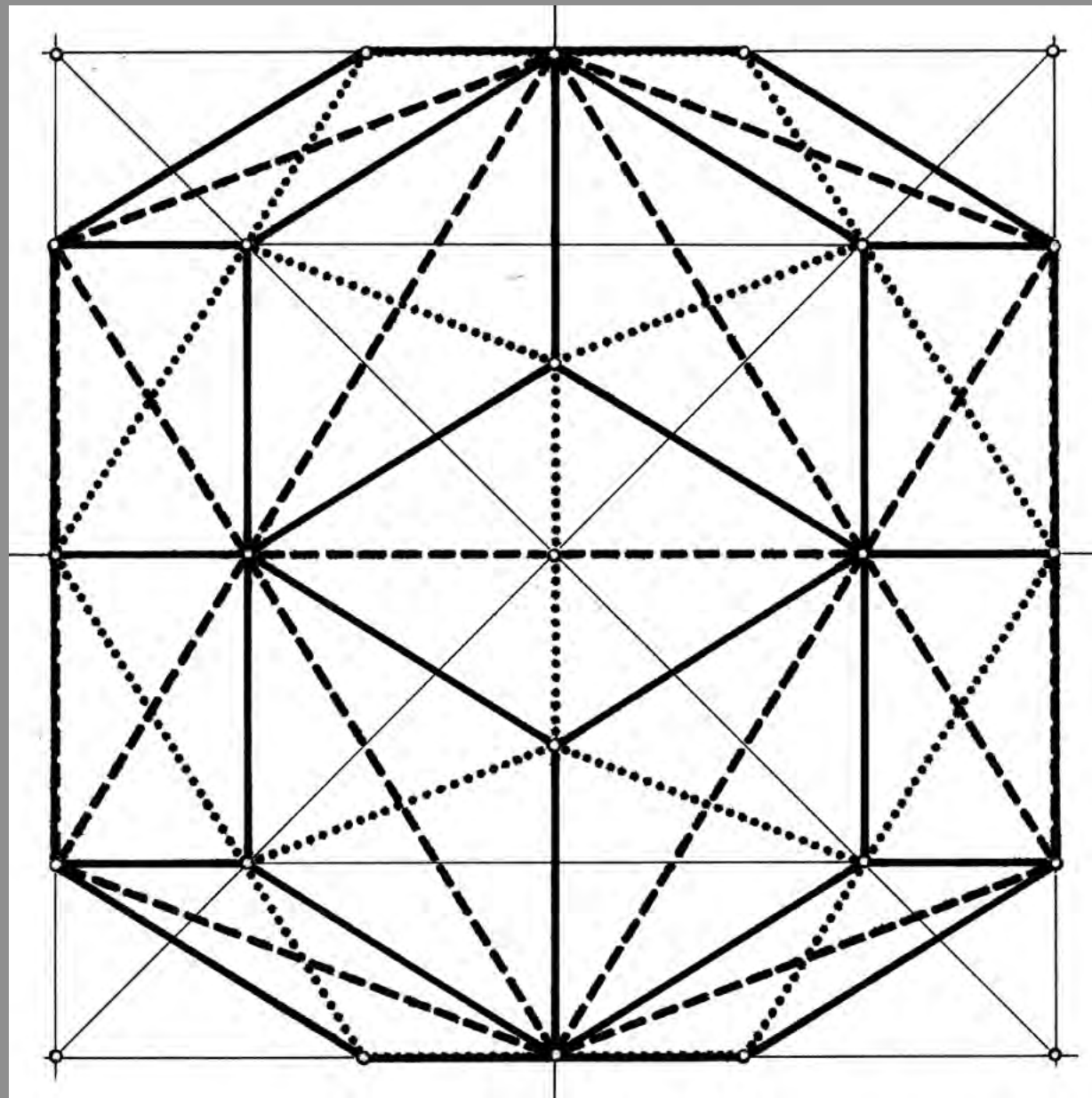




fot. 7.9

Rys. III. GRUPA DODEKAEDRU; dwie bryły foremne: D, I + $\oplus$ półforemna

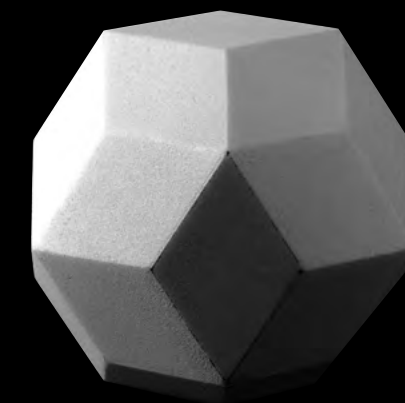
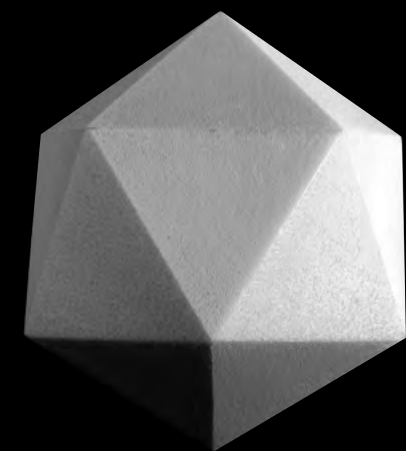
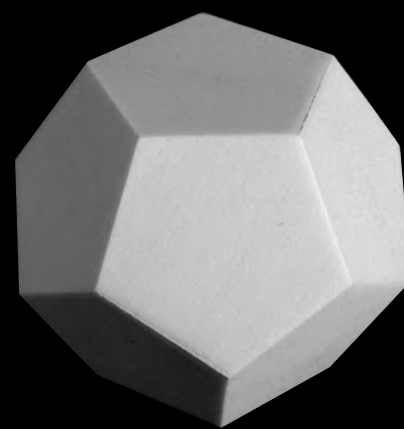
- linia kropkowana – DODEKAEDR o przekątnej ściany a i krawędzi b
- linia przerywana – IKOSAEDR o krawędzi a
- linia gruba – TRZYDZIEŚCIAN ROMBOWY o przekątnych rombu a i b
- linia cienka – HEKSAEDR o krawędzi a wpisany w D i opisany na trzech bryłach



III

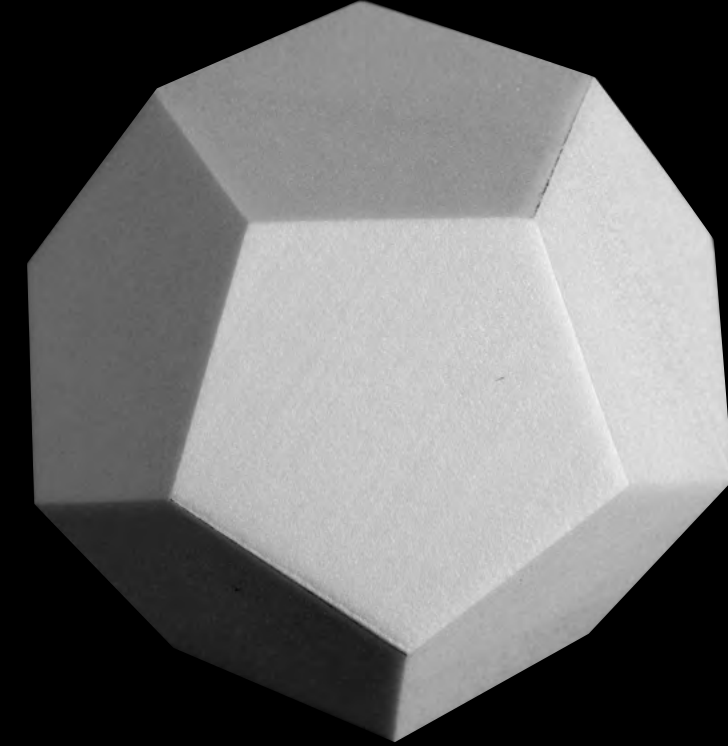
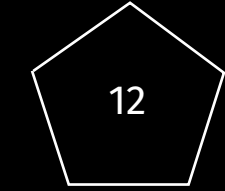
GRUPA DODEKAEDRU

D I $\oplus$



8

DODEKAEDR D



DODEKAEDR D

Dwunastościan foremny

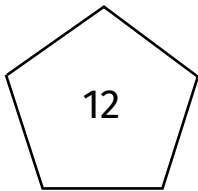
Jedyna bryła foremna o ścianach pięciobocznych. Jej postać jest wyrazem ładu, harmonii i piękna. Ponadto symbolika liczb 5 i 12 wzmacniają jej wartość i znaczenie. Spośród brył foremnych D jest najbardziej zbliżony do powierzchni sferycznej (→Tabela zbiorcza: suma kątów wokół naroża oraz całkowita suma kątów) a jego budowa wewnętrzna jest najbardziej skomplikowana.

Szkielet wewnętrzny D tworzy 5 par prostych przecinających się w środku bryły a leżących na pięciu płaszczyznach. Na trzech z nich – wzajemnie prostopadłych – pod kątem $41^{\circ}30'$. Na pozostałych dwóch – wzajemnie prostopadłych – pod kątem $70^{\circ}32'$ tzn. tak jak w Heksaedrze. Wzajemny układ tych płaszczyzn jest następujący: dwie płaszczyzny H przecinają się na wspólnej osi z dwiema płaszczyznami D pod kątem 45° . Piąta płaszczyzna D jest prostopadła do pozostałych czterech (rys. 8.1). Dowolna powierzchnia sferyczna o środku wspólnym z bryłą przetnie te proste, wyznaczając położenie przestrzenne wierzchołków D.

Szkielet zewnętrzny D tworzy 20 wierzchołków połączonych trzydziestoma krawędziami. W każdym wierzchołku zbiegają się 3 krawędzie pod kątem $69^{\circ}15'$ w stosunku do przekątnej bryły. Przeciwnieległe krawędzie układają się w 15 par wzajemnie równoległych. Przeciwnieległe ściany układają się w 6 par wzajemnie równoległych i przekręconych o 36° wokół osi przechodzącej przez ich środki. Każda ściana styka się z pięcioma sąsiednimi. Kąt dwuścienny wynosi $116^{\circ}30'$ ($2 \times 58^{\circ}15'$) (rys. 8.1 b).

Kontur D w charakterystycznych rzutach przybiera kształt sześcioboku nieforemnego, dziesięcioboku foremnego i dwunastoboku nieforemnego (rys. 8.2 a, b, c).

Dodekaedr jest bryłą dualną do Ikosaedru i odwrotnie. Jego 20 wierzchołków może stykać się ze środkami ścian I opisanego na D, a kąt



krawędziowy D jest równy połowie kąta dwuściennego I (→Tabela zbiorcza).

Monolit D najlepiej będzie wykonać z Heksaedru przez odpowiednie ścinanie jego ścian pod kątem $58^{\circ}15'$ wzdłuż wyznaczonych linii połowiących ściany. Linie te nanosimy na każdej ścianie naprzemianlegle (fot. 8.2). Po dwunastu cięciach – po 2 na każdą ścianę H – bryła jest gotowa. Pięcioboki foremne pojawiają się w czterech ostatnich cięciach.

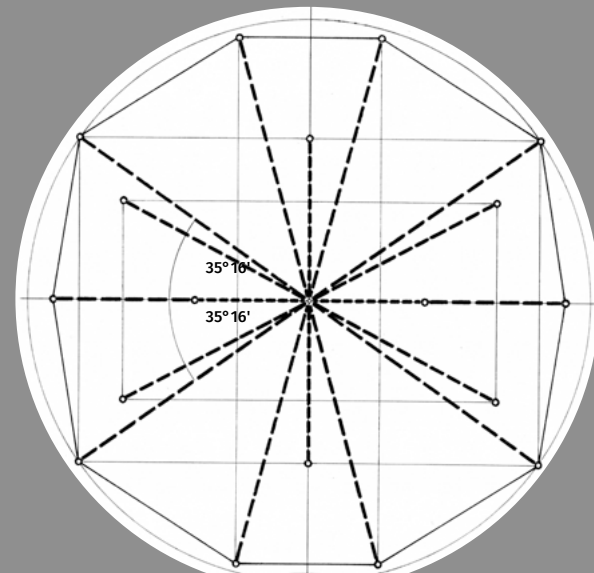
Ortogonalny podział D daje nam równe części: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{8}$ (fot. 8.3). Ósme części D występują w wersji lewej i prawej. Całość można złożyć z czterech ósemek lewych i czterech ósemek prawych.

Strukturalny podział D rozбивa bryłę na 12 jednorodnych ostrosłupów pięciobocznych o kątach dwuściennych: $58^{\circ}15'$ przy podstawie i 120° między ścianami bocznymi (fot. 8.4). Z takich jednostek strukturalnych można składać równe części D: $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ oraz $\frac{1}{2}$ na dwa sposoby (fot. 8.5, 8.6, 8.7). Dwie jednostki strukturalne połączone podstawami utworzą podwójny ostrosłup pięcioboczny o kątach $116^{\circ}30'$ w pasie obwodowym i 120° pomiędzy ścianami bocznymi (fot. 8.8). Jeśli do każdej ściany D dodamy jednostkę strukturalną to powstanie Dodekaedr gwiazdzisty, lecz nie będzie to gwiazdzistość zgodna z tzw. *stellacją*¹⁴.

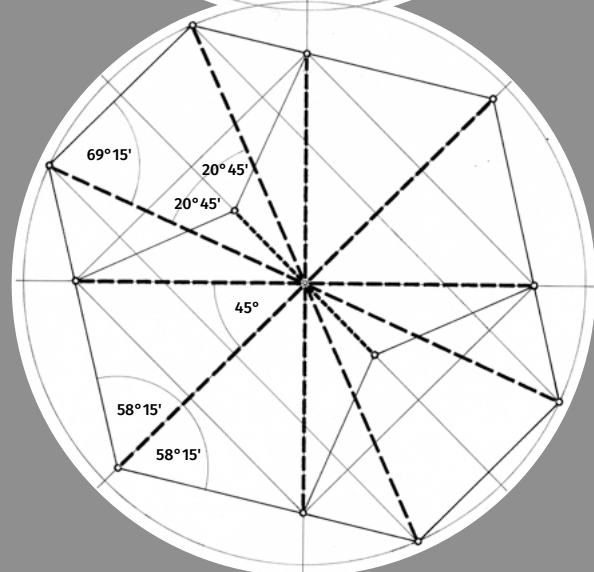
Proste deformacje D można realizować biorąc jako bryłę wyjściową nie Heksaedr, tylko prostopadłościan o wybranych proporcjach boków. Na fotografii 8.9 pokazano 2 różnie zdeformowane D wykonane z graniastosłupów kwadratowych o proporcjach boków $8 \times 8 \times 6$ oraz $7 \times 7 \times 8$. Na fotografii 8.10 pokazano D wykonany z prostopadłościanu o proporcjach boków $6 \times 7 \times 8$. We wszystkich przypadkach kąty dwuścienne D zostały zachowane.

14 Galeria wielościanów – str. 106

a

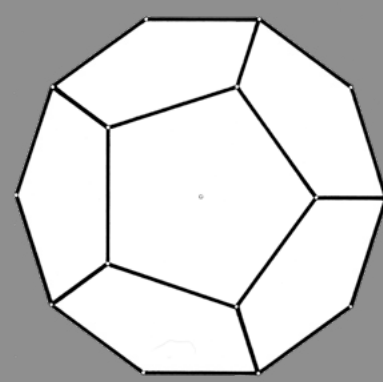


b

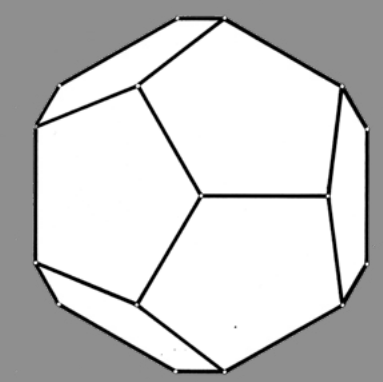


Rys. 8.1 DODEKAEDR, szkielet wewnętrzny z kątami w dwóch rzutach.

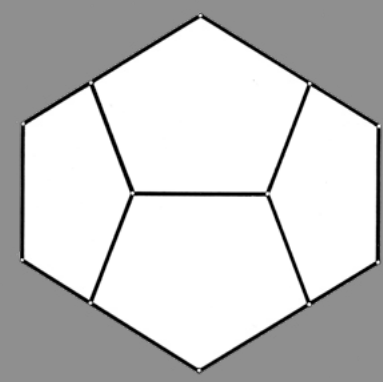
a



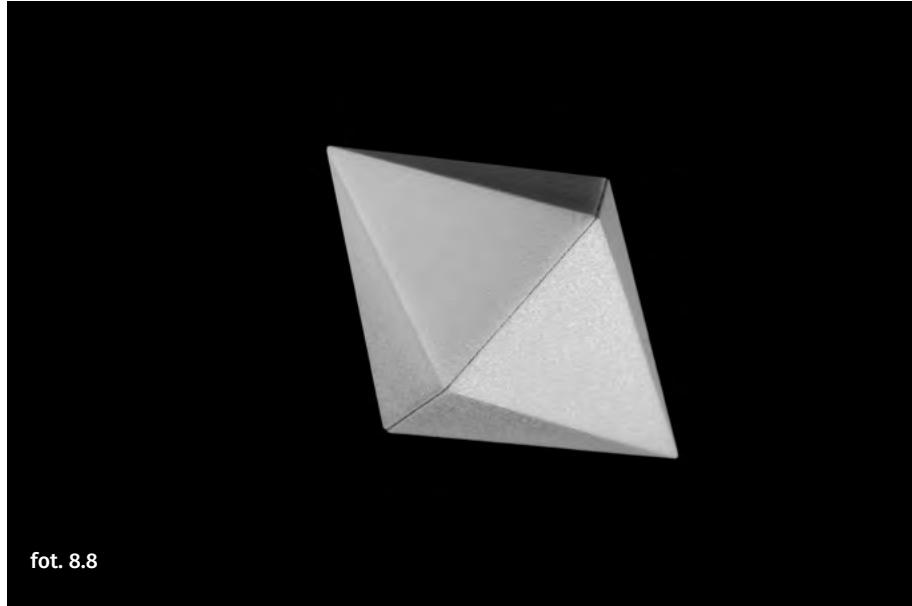
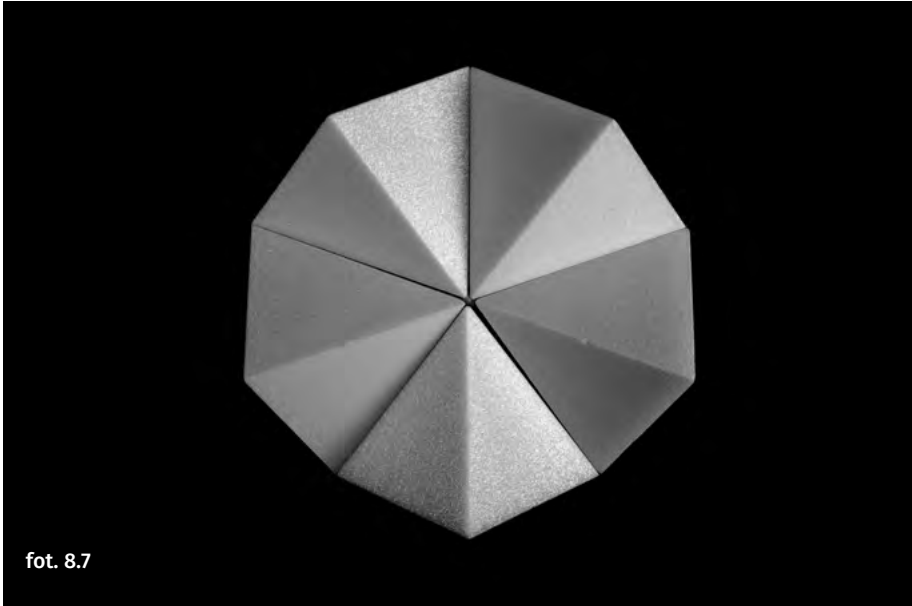
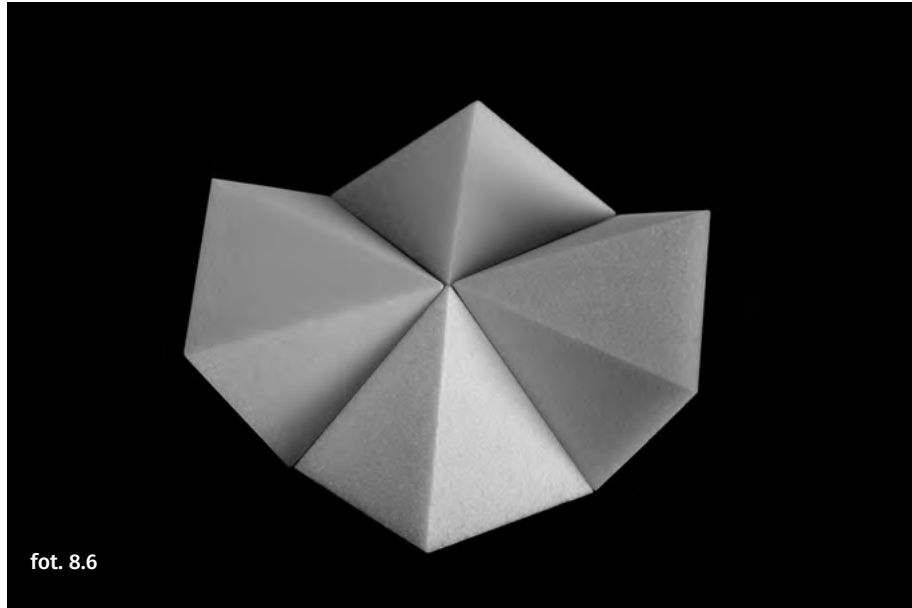
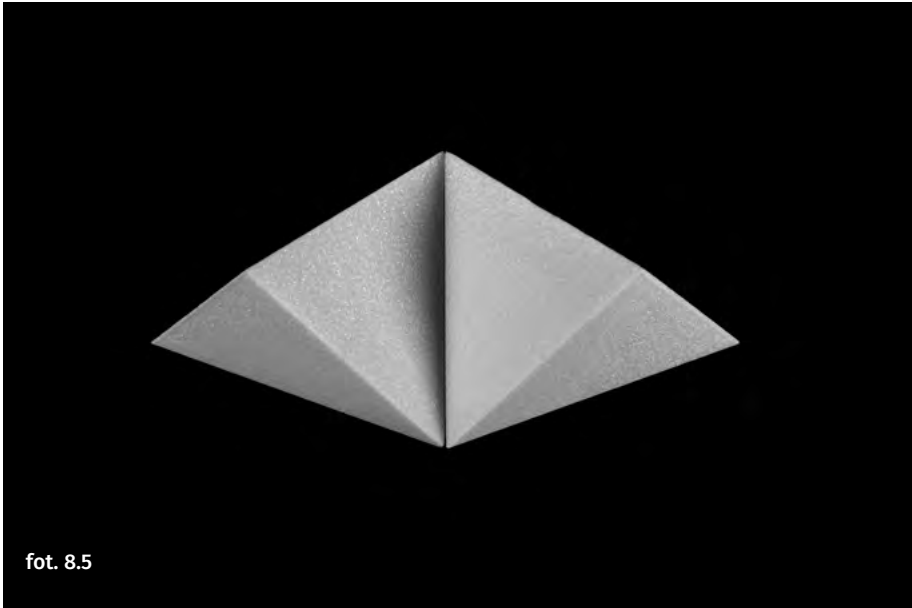
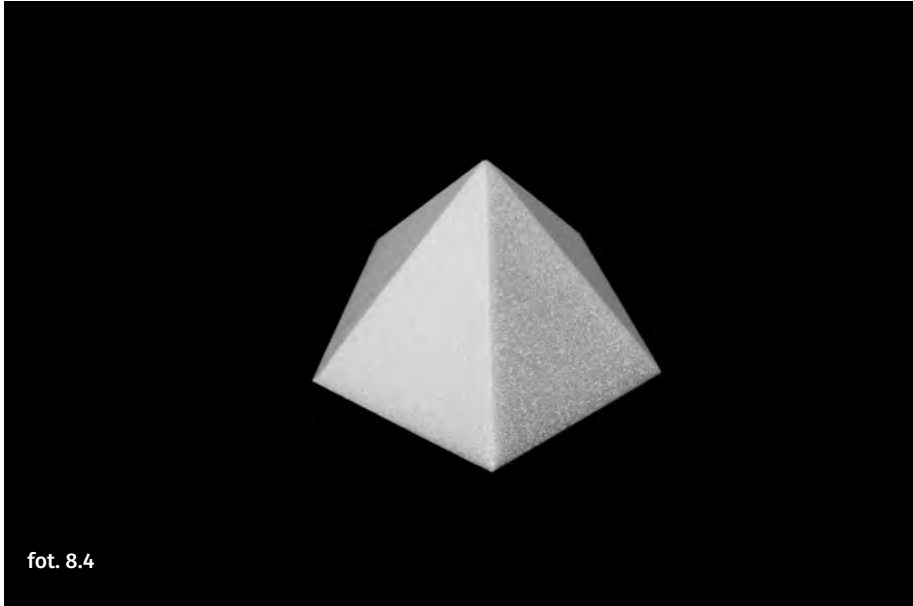
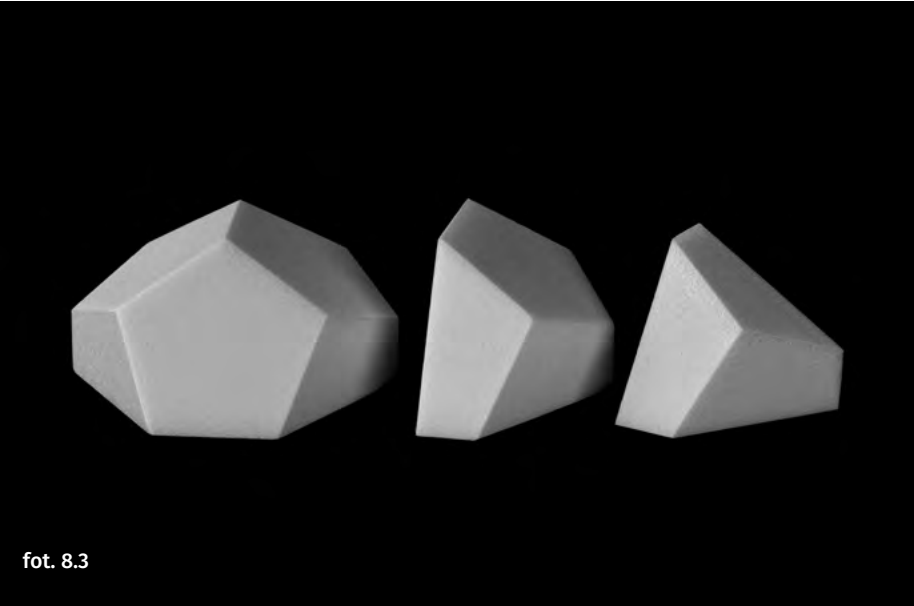
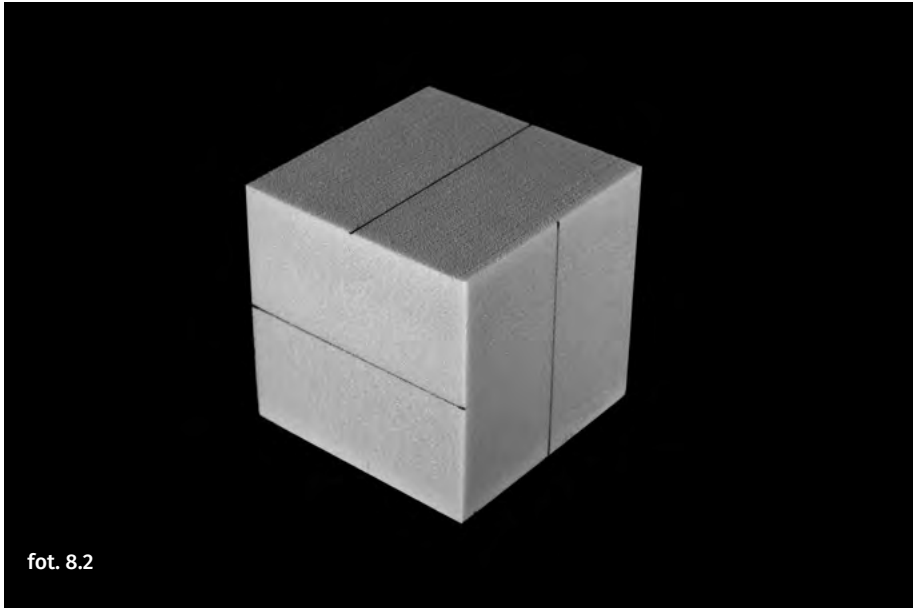
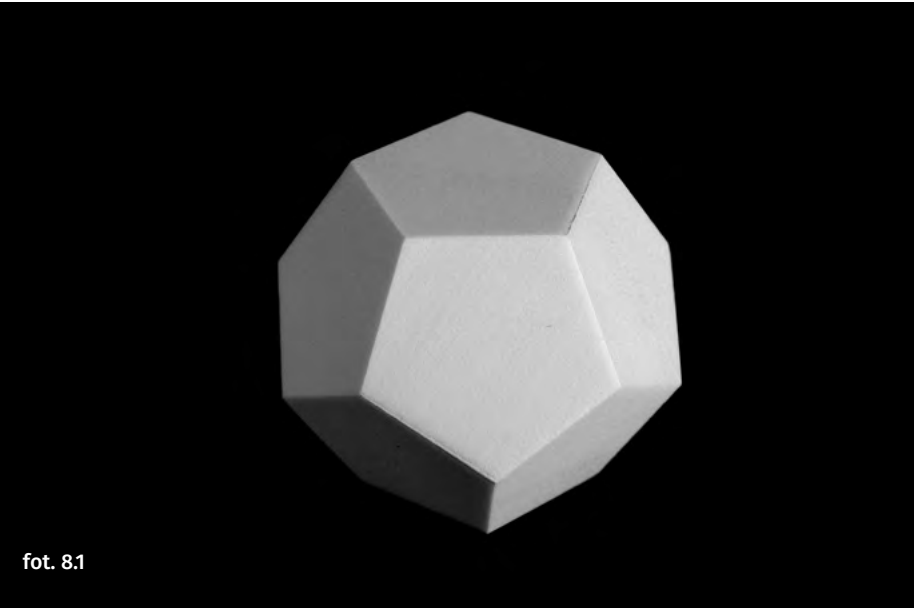
b

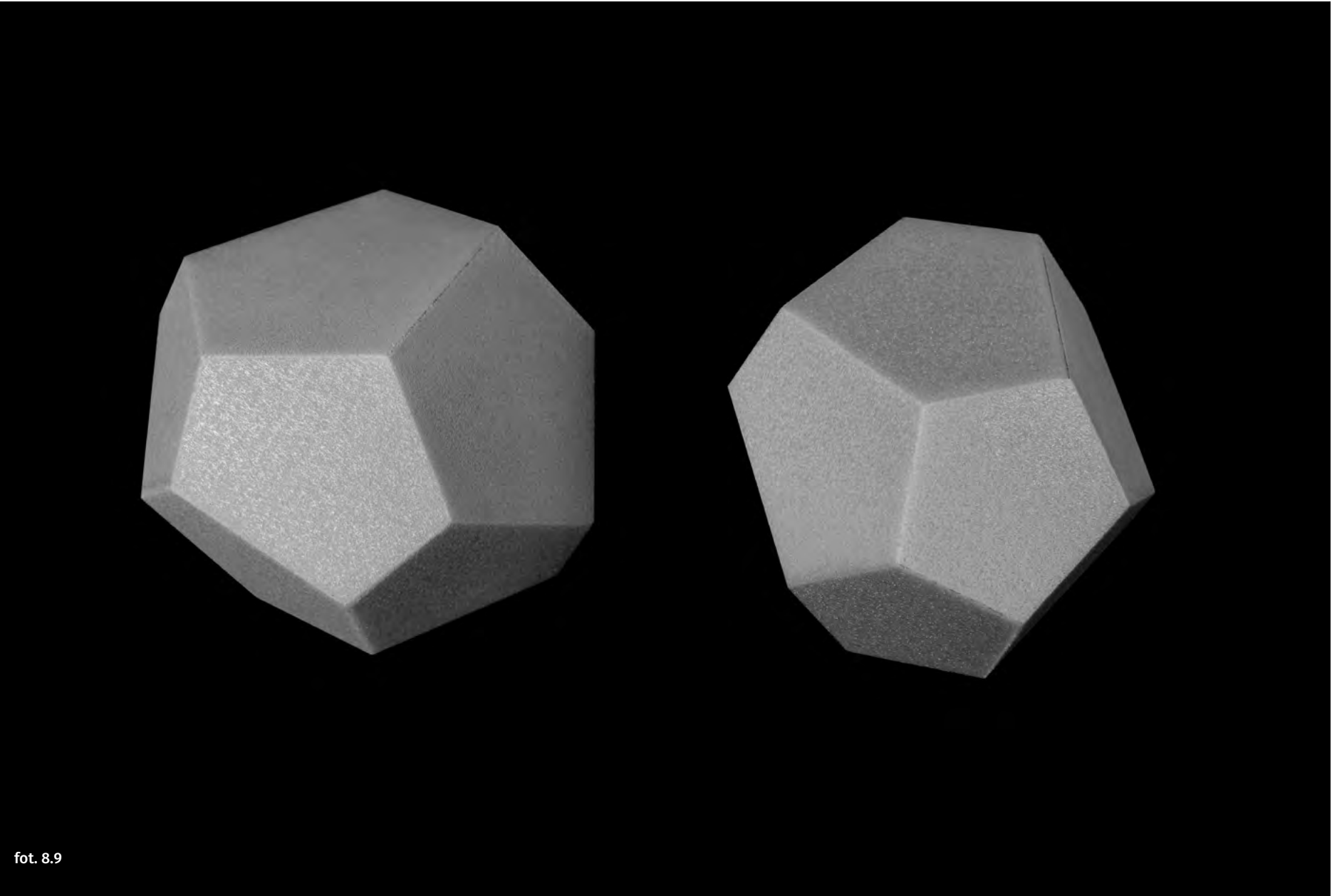


c

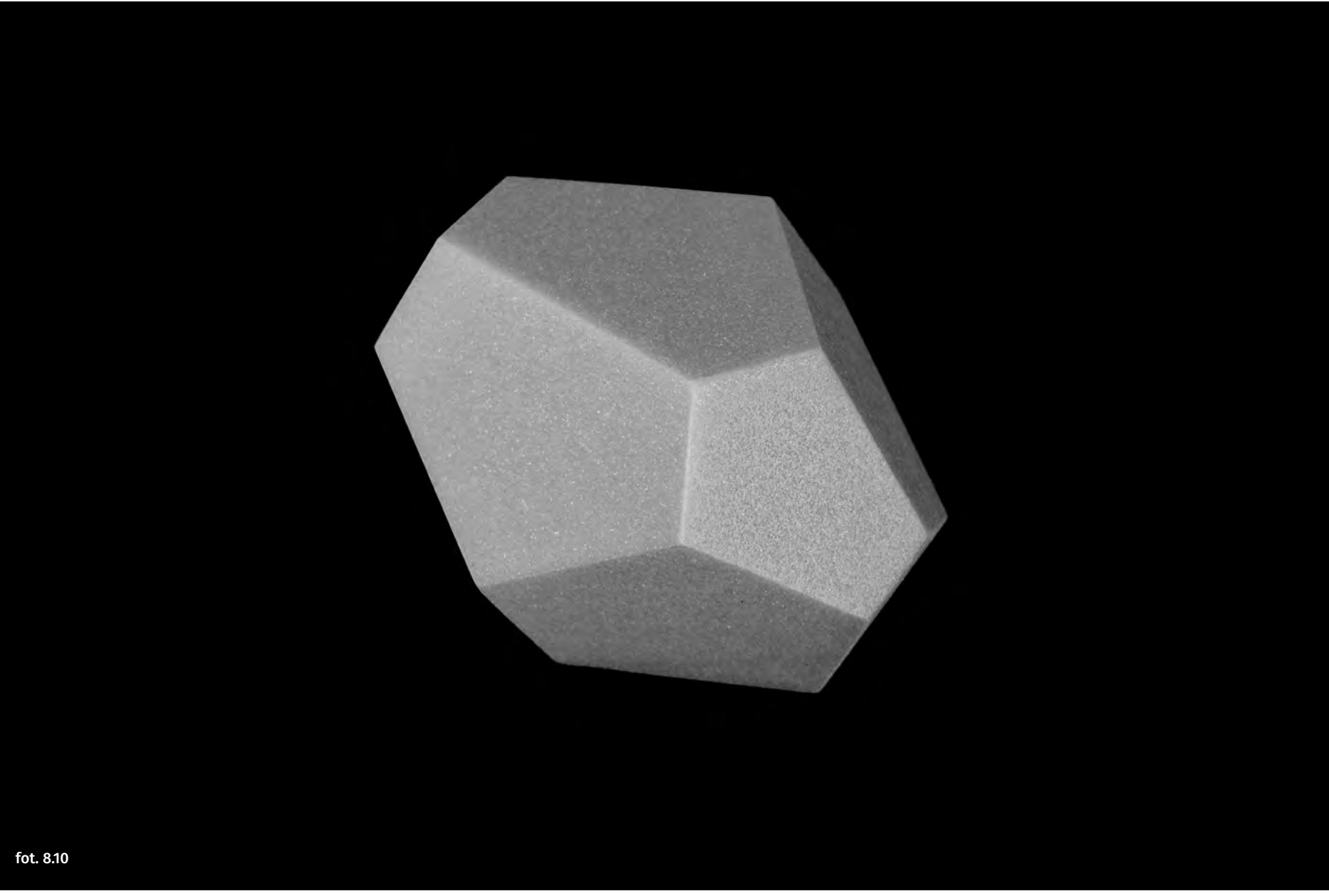


Rys. 8.2 DODEKAEDR, szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony wierzchołka c) od strony krawędzi.





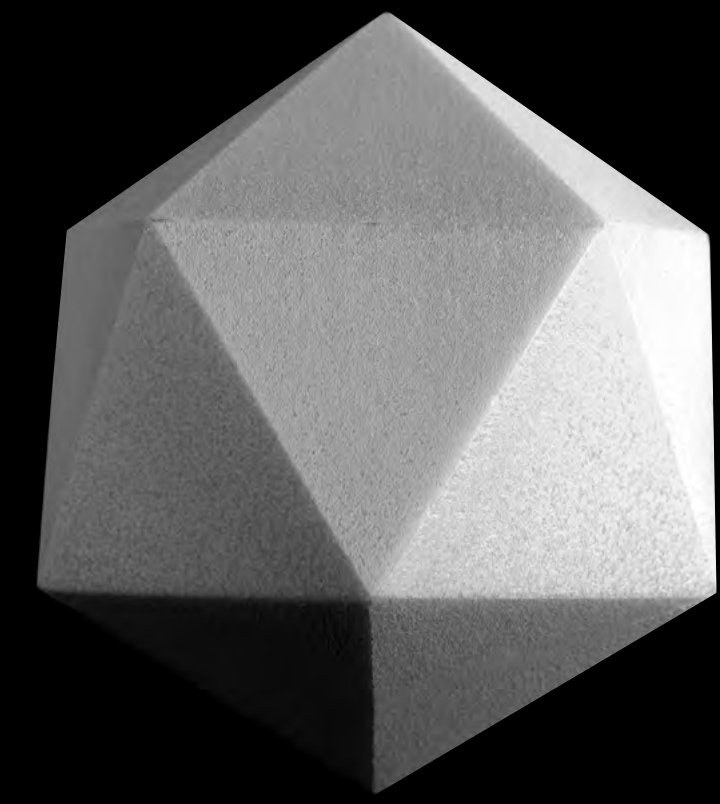
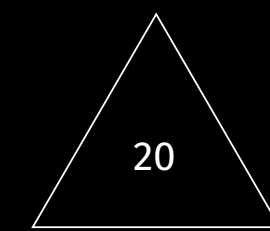
fot. 8.9



fot. 8.10

9

IKOSAEDR I



IKOSAEDR I

Dwudziestościan foremny

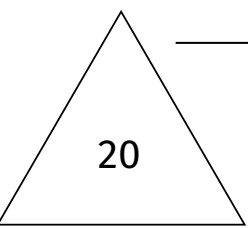
Trzecia bryła foremna o ścianach trójkątnych. Zewnętrznie najbardziej skomplikowana ze względu na największą liczbę ścian. Natomiast jej budowa wewnętrzna jest zaskakująco prosta. Bryłę cechuje swoista elegancja, wyrafinowane uporządkowanie trójkątów, w którym postrzegamy przenikające się pięcioboki.

Szkielet wewnętrzny I tworzą 3 pary prostych przecinających się w środku bryły pod kątem $63^{\circ}30'$, a leżących na trzech płaszczyznach wzajemnie prostopadłych. Dowolna powierzchnia sferyczna o środku wspólnym z bryłą przetnie te proste, wyznaczając położenie przestrzenne wierzchołków I (rys. 9.1).

Szkielet zewnętrzny I tworzy 12 wierzchołków połączonych trzydziestoma krawędziami. W każdym wierzchołku zbiega się 5 krawędzi pod kątem $58^{\circ}15'$ w stosunku do przekątnej bryły. Przeciwległe krawędzie układają się w 15 par wzajemnie równoległych. Przeciwległe ściany są wzajemnie równoległe i przekręczone o 60° wokół osi przechodzącej przez ich środki. Każda ściana styka się z trzema sąsiednimi. Kąt dwuścienny wynosi $138^{\circ}30'$ ($2 \times 69^{\circ}15'$) (rys. 9.1).

Kontur I w charakterystycznych rzutach przybiera kształt sześcioboku nieforemnego, sześcioboku foremnego i dziesięcioboku foremnego (rys. 9.2 a, b, c).

Ikosaedr jest bryłą dualną do Dodekaedru i odwrotnie. Jego 12 wierzchołków może stykać się ze środkami ścian D opisanego na I, a kąt krawędziowy I jest równy połowie kąta dwuściennego D ($\rightarrow$ Tabela zbiorcza).

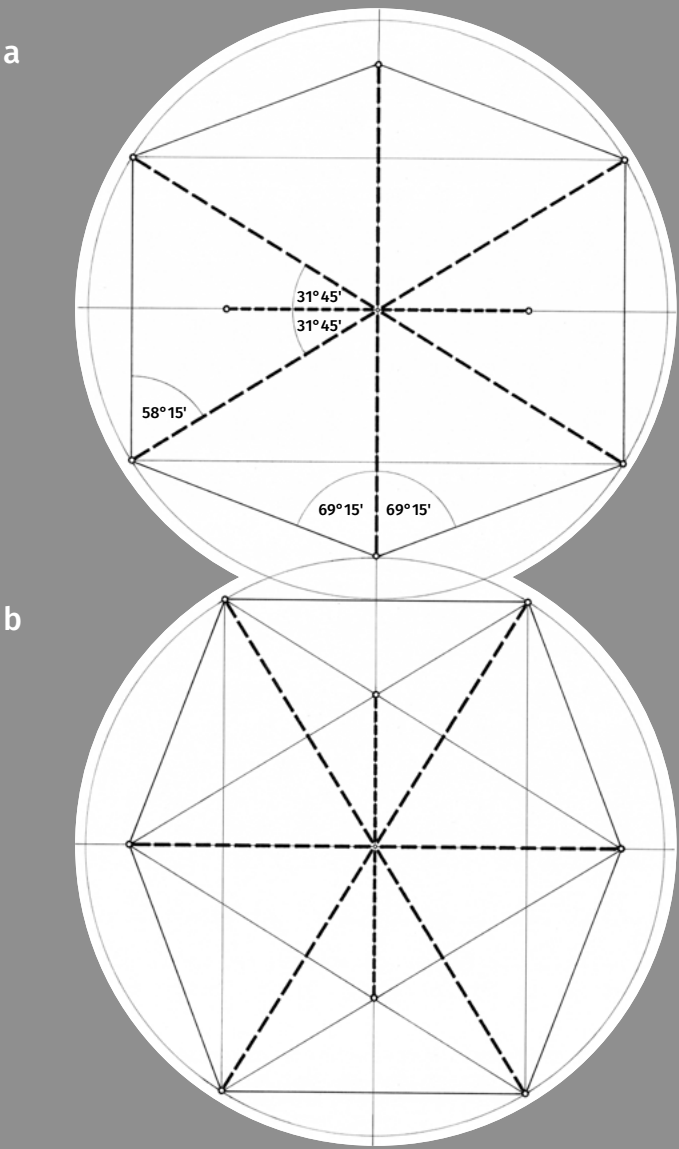


Monolit I najlepiej będzie wykonać z Heksaedru, podobnie jak w przypadku D – ścinając jego ściany pod kątem $69^{\circ}15'$ wzdłuż linii połączających ściany (fot. 8.2). Po dwunastu cięciach, których efekt pokazano na fotografii 9.2, należy zmienić kąt na $48^{\circ}30'$, aby pościnać 8 naroży powstałego dwunastościanu nieforemnego. Dopiero wtedy powstanie kompletny I.

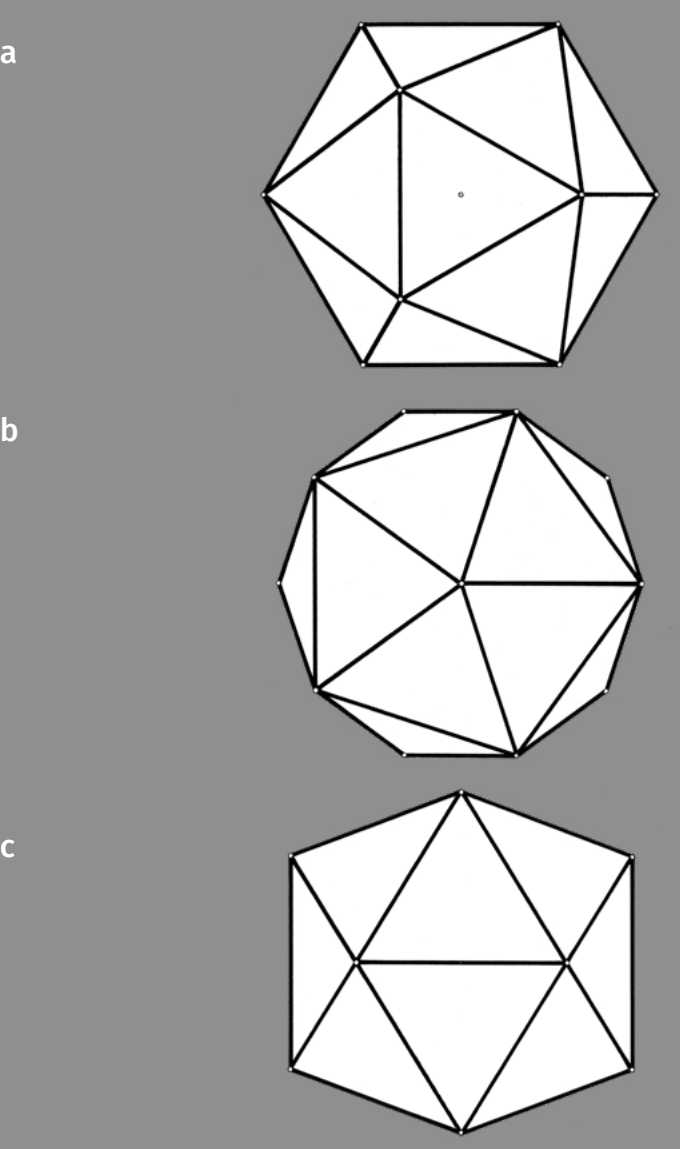
Ortogonalny podział I daje nam równe części: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ (fot. 9.3). Ósme części I występują w wersji prawej i lewej. Całą bryłę można złożyć z czterech ósemek prawych i czterech ósemek lewych.

Strukturalny podział I rozbija całość na 20 jednorodnych ostrosłupów trójkątnych o kątach dwuściennych: $69^{\circ}15'$ przy podstawie i 72° między ścianami bocznymi (fot. 9.4). Odnosimy wrażenie, że ostrosłupy są Tetraedrami, ale tak nie jest. Z jednostek strukturalnych można składać różne fragmenty całości (fot. 9.5, 9.6, 9.7, 9.8), ale równe części mogą być tylko dwie. Połowę bryły można złożyć z dziesięciu jednostek na dwa sposoby. Na fotografii 9.9 pokazano jeden z nich. Jeśli do każdej ściany I dodamy jednostkę strukturalną, to powstanie Ikosaedr gwiazdzisty, lecz nie będzie to gwiazdzistość zgodna z tzw. *stellacją*¹⁵.

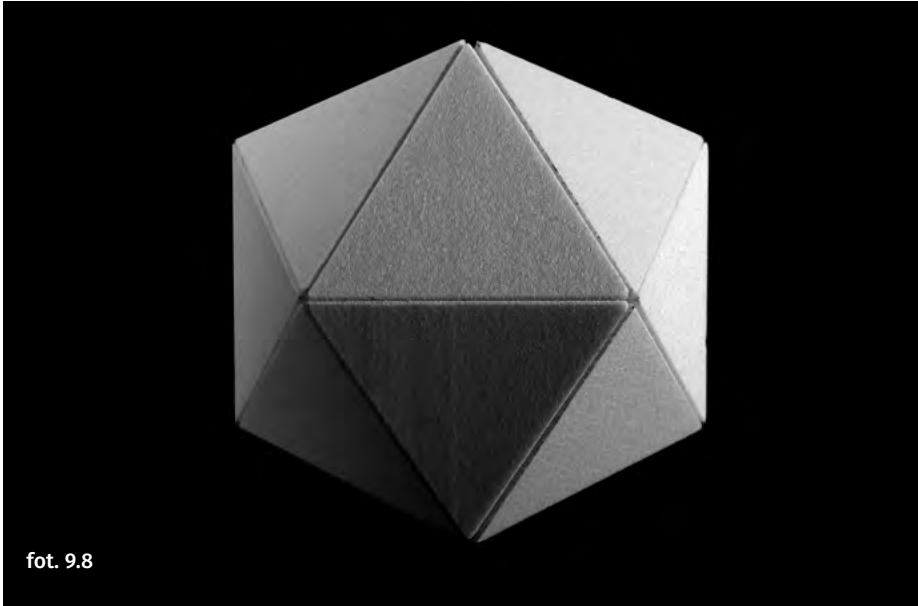
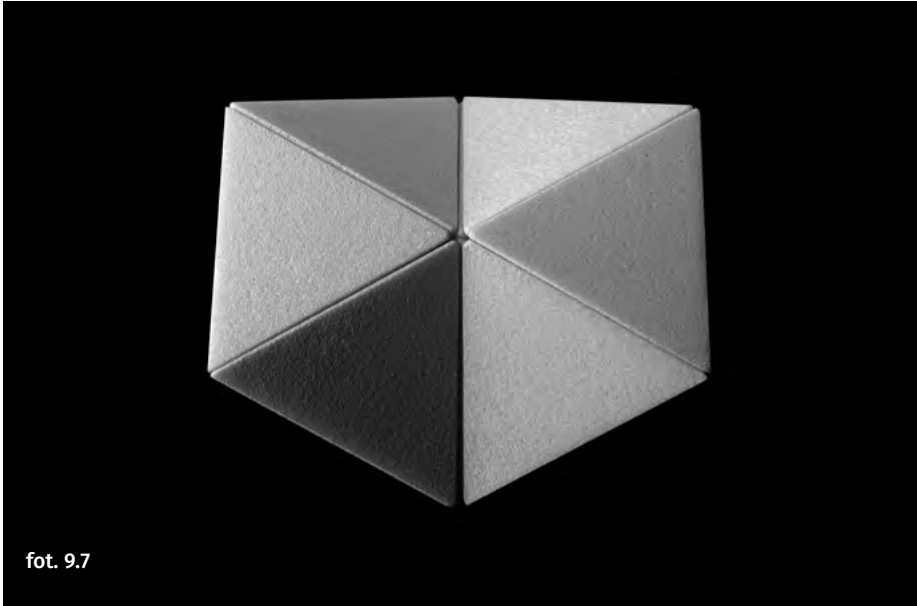
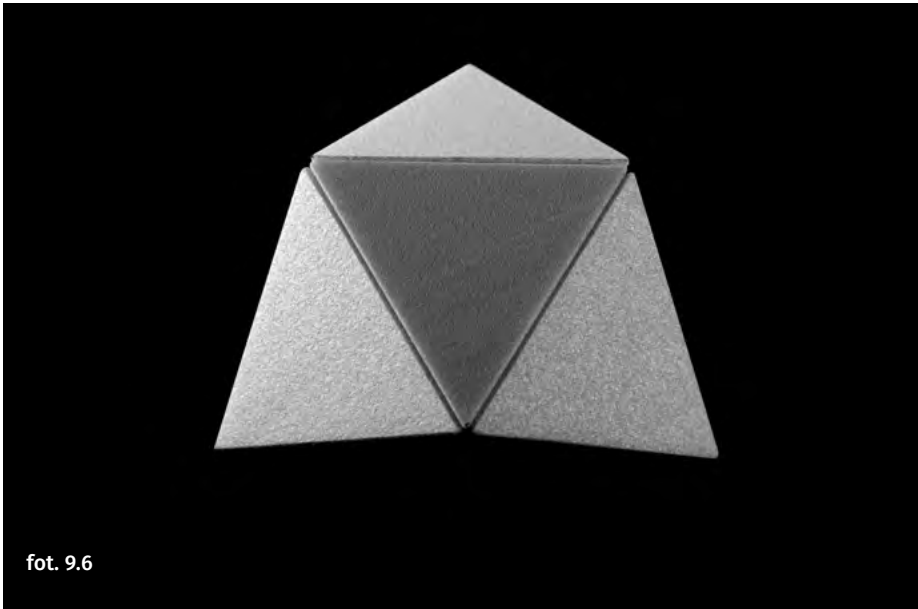
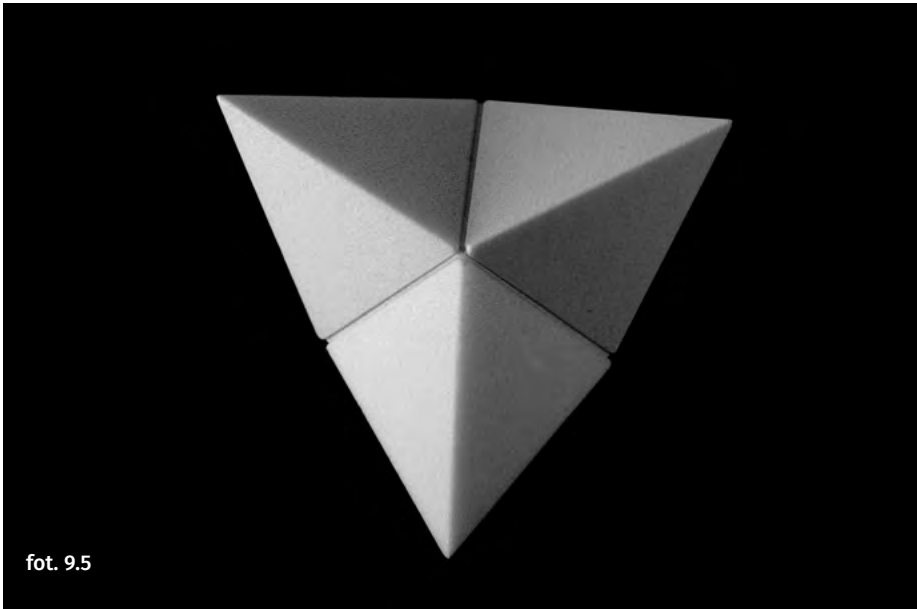
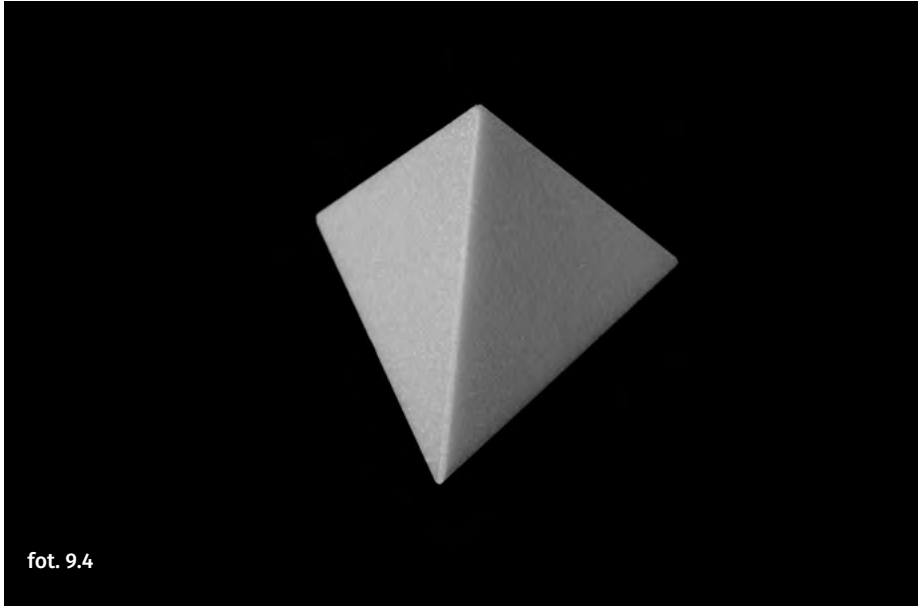
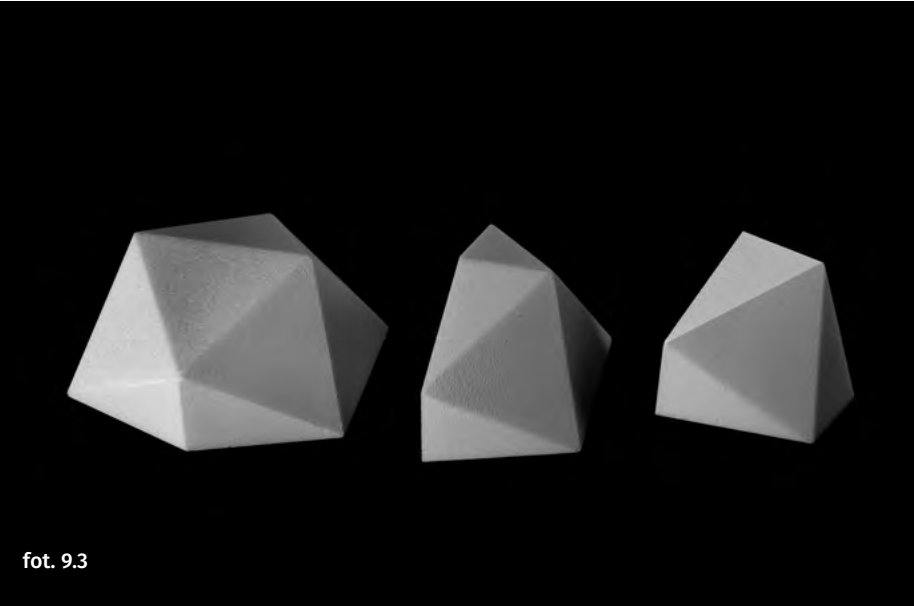
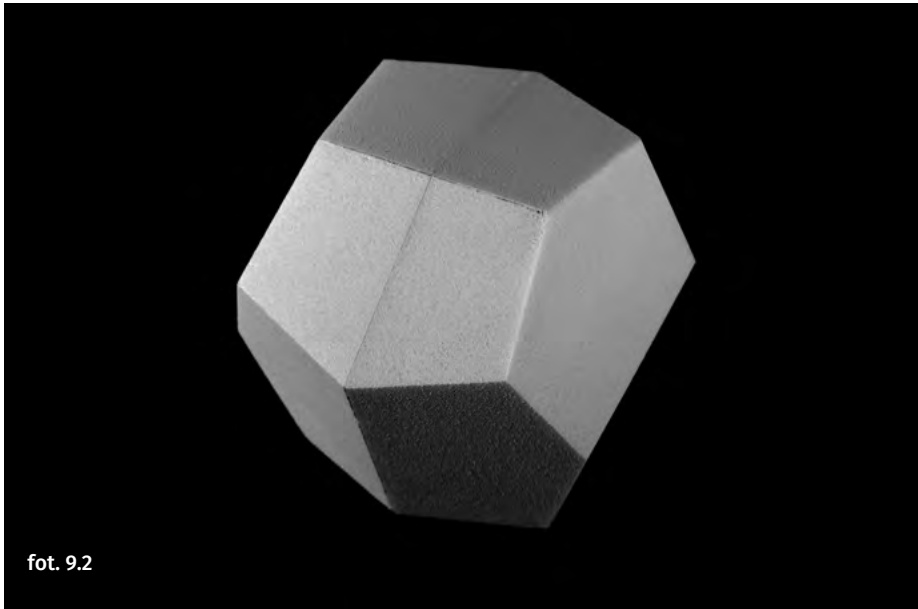
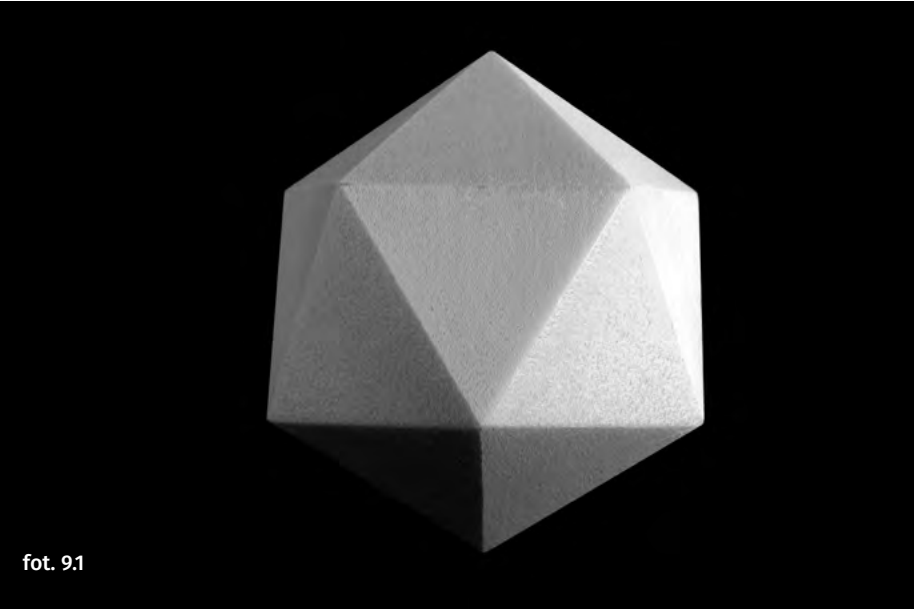
Proste deformacje I można realizować biorąc jako bryłę wyjściową nie Heksaedr, lecz jakiś prostopadłościan o wybranych proporcjach boków. Na fotografii 9.10 pokazano dwudziestościan wykonany z prostopadłościanu o proporcjach boków $6 \times 7 \times 8$. Kąty dwuścienne zostały zachowane pomiędzy dwunastoma ścianami.

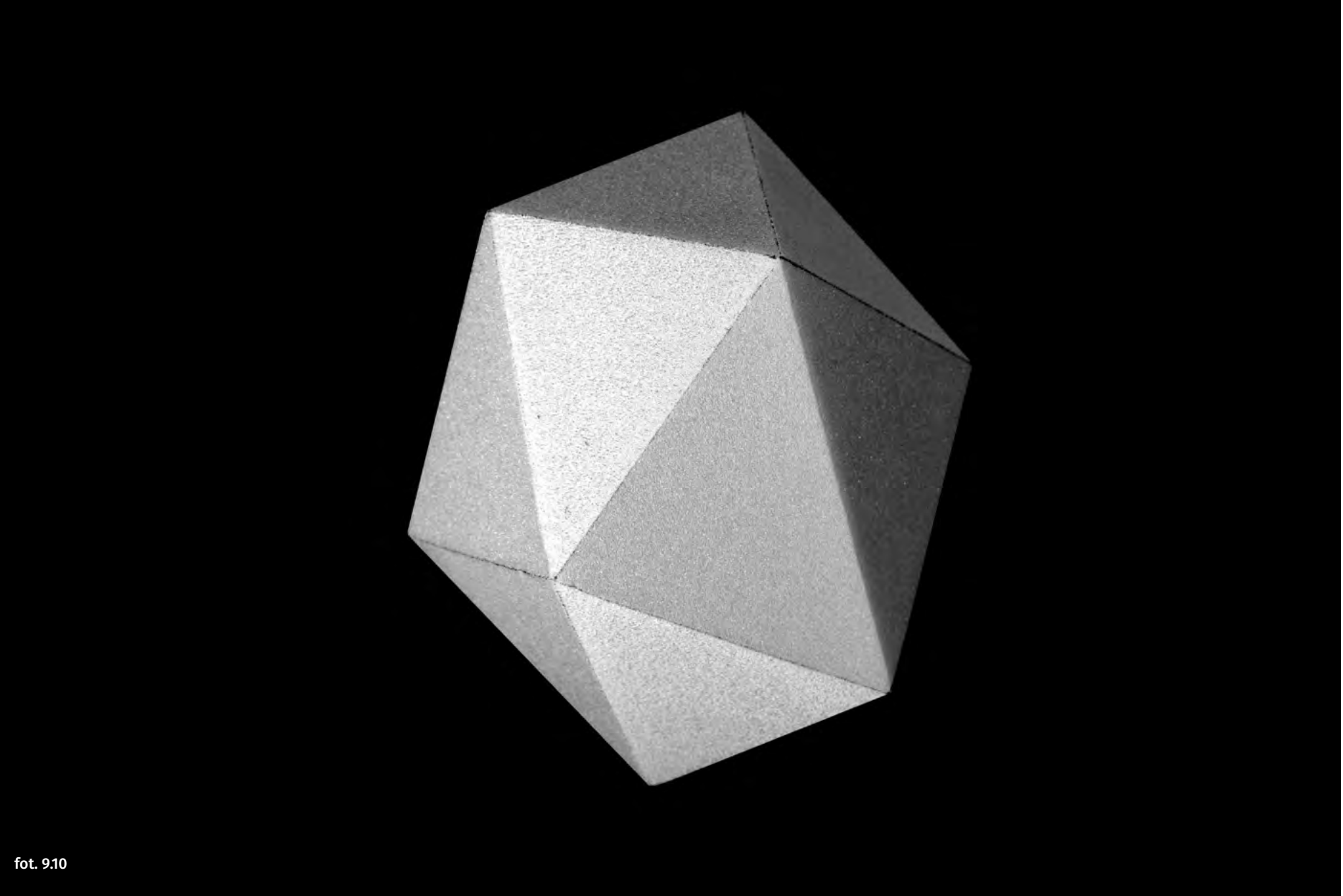
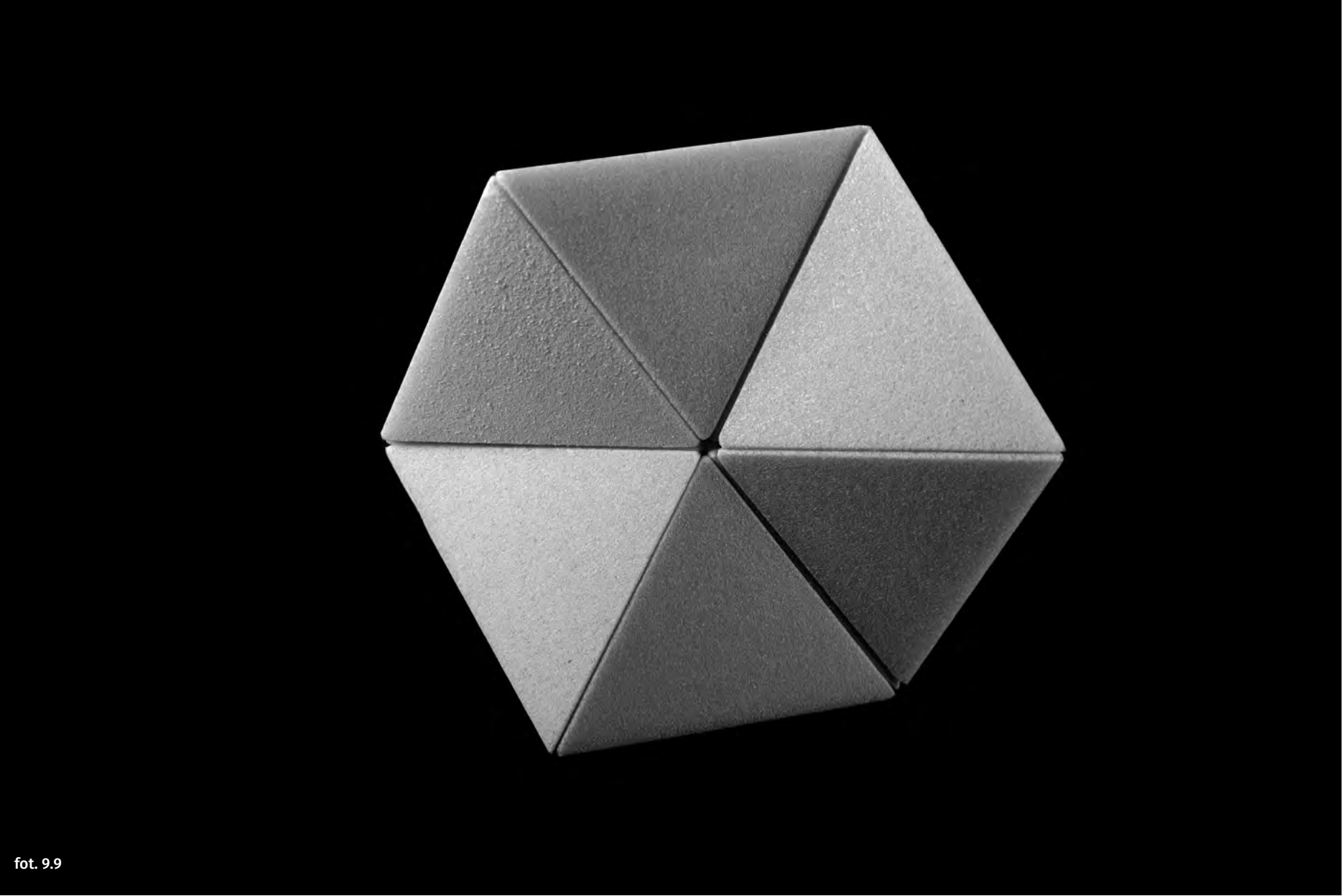


Rys. 9.1 IKOSAEDR, szkielet wewnętrzny z kątami w dwóch rzutach.



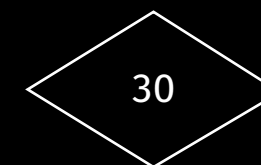
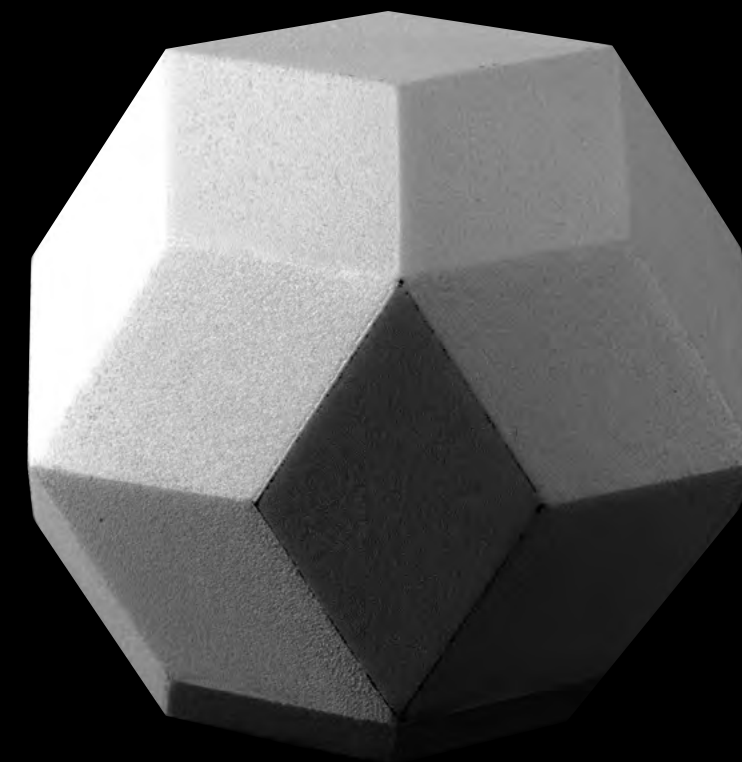
Rys. 9.2 IKOSAEDR, szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony wierzchołka c) od strony krawędzi.



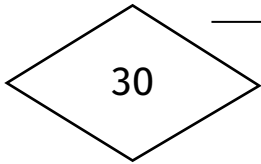


10

TRZYDZIEŚTOŚCIAN
ROMBOWY ∇



TRZYDZIEŚTOŚCIAN ROMBOWY $\star$



Powstaje przez takie nałożenie szkieletów Dodekaedru i Ikosaedru, w którym krawędzie obu brył przecinają się pod kątem prostym w swoich środkach. Gdy połączymy wszystkie wierzchołki ($12 + 20 = 32$) odcinkami prostymi powstanie 30 rombów o kątach: $63^{\circ}30'$ i $116^{\circ}30'$.

$\star$ jest w grupie Dodekaedru odpowiednikiem Φ z grupy Heksaedru. (zobacz Graf zbiorczy, str. 116). Jest to bryła półforemna o dwoistej naturze. Posiada ściany jednorodne, ale w jej wierzchołkach zbiega się różna liczba krawędzi, co wynika z różnej długości przekątnych bryły. Dłuższa przekątna bryły pochodzi od I a krótsza od D. W dwunastu wierzchołkach zbiega się 5 krawędzi pod kątem $63^{\circ}30'$, a w dwudziestu wierzchołkach zbiegają się 3 krawędzie pod kątem 79° (rys. 10.1). W sumie $\star$ posiada 60 krawędzi – tyle samo co D/I ($\rightarrow$ Tabela zbiorcza). Przeciwległe ściany układają się w 15 par wzajemnie równoległych. Każda ściana styka się z czterema sąsiednimi. Kąt dwuścienny wynosi 144° ($2 \times 72^{\circ}$) (rys. 10.2 b).

Kontur $\star$ w charakterystycznych rzutach przybiera kształt sześcioboku foremnego, ośmioboku nieforemnego i dziesięcioboku foremnego (rys. 10.2 a, b, c).

Bryłą dualną do $\star$ jest Dodekaedr ścięty D/I. Jego 30 wierzchołków może stykać się ze środkami ścian $\star$, a kąt krawędziowy jest równy połowie kąta dwuściennego $\star$ ($\rightarrow$ Tabela zbiorcza).

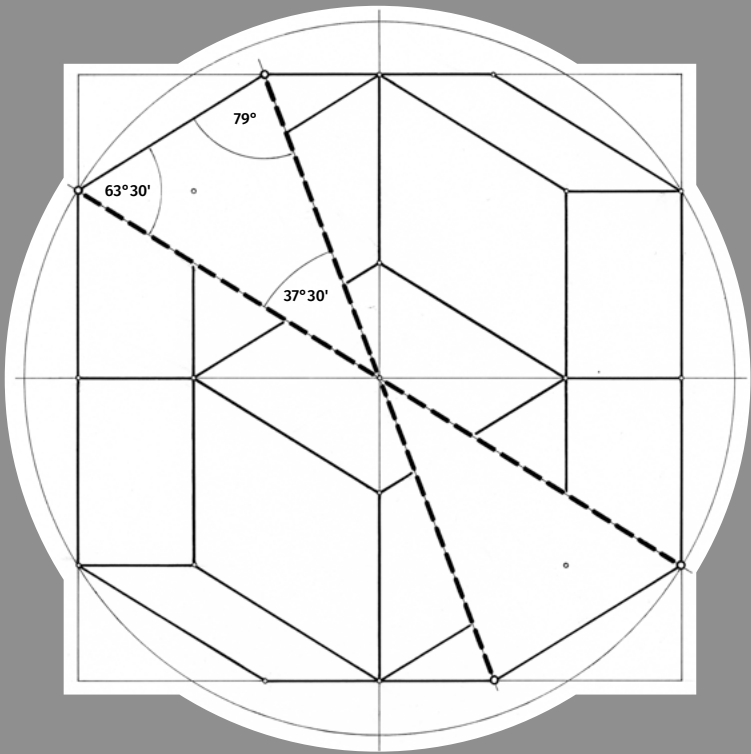
Wykonanie monolitu $\star$ jest skomplikowane. Bryłą wyjściową będzie Heksaedr. Na każdej ścianie H wyznaczamy dwie pary linii równoległych, przecinających się w czterech punktach, będących wierzchołkami rombu o kątach $63^{\circ}30'$ i $116^{\circ}30'$. Romby zajmują centralne miejsce na ścianach

H, ale są zorientowane naprzemiennie (fot. 10.2). Umieszczamy bryłę w specjalnej podstawie pozycjonującej i dokonujemy cięć wzdłuż wyznaczonych linii pod kątem 54° , każdorazowo zmieniając ustawienie bryły. Po dwudziestu czterech operacjach (po 4 na każdą ścianę H) $\star$ jest gotowy. Jest to bryła najciaśniej osadzona w H, ponieważ jej 6 ścian przylega do ścian H, co stanowi 20% jej powierzchni. Pozostałe bryły z grupy Dodekaedru mają z H styk krawędziowy.

Jak się okazuje monolitami $\star$ można zbudować przestrzeń tak, jak sześcianami, ale będzie to zabudowa z ażurami.

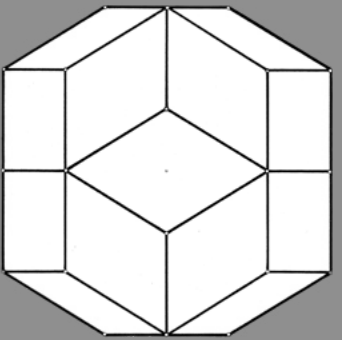
Ortogonalny podział $\star$ daje nam równe części: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ (fot. 10.3). Ósme części występują w wersji lewej i prawej. Całość składa się z czterech ósemek prawych i czterech ósemek lewych.

Strukturalny podział $\star$ rozбивa całość na 30 ostrosłupów rombowych o kątach dwuściennych 72° przy podstawie oraz 72° i 120° między ścianami bocznymi (fot. 10.4). Z pięciu jednostek strukturalnych można złożyć $\frac{1}{8}$ bryły (fot. 10.5, 10.6). Z dwóch szóstych części złożymy $\frac{1}{4}$ bryły (fot. 10.7), a z trzech szóstych części złożymy $\frac{1}{2}$ bryły na dwa sposoby (fot. 10.8) – analogicznie do składania Heksaedru z jednostek strukturalnych, tj. 3 części mogą stykać się wzajemnie ze sobą, albo jedna część może łączyć dwie przeciwległe, które się nie stykają. Na fotografii 10.8 pokazano drugi z tych sposobów. Dwie jednostki strukturalne połączone podstawami utworzą ośmiościan o trzech różnych kątach dwuściennych: 144° przyłączonych podstawach i 72° oraz 120° między ścianami bocznymi (fot. 10.9). Krawędzie obwodowe tego ośmiościanu układają się w 3 różne romby.

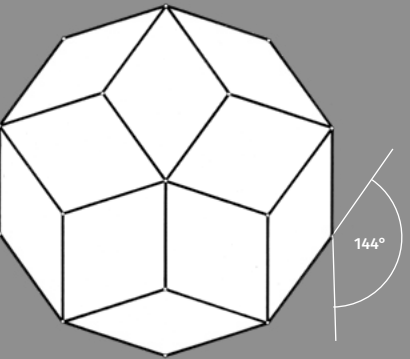


Rys. 10.1 TRZYDZIEŚTOŚCIAN ROMBOWY, fragment szkieletu wewnętrznego z kątami w jednym rzucie od strony ściany.

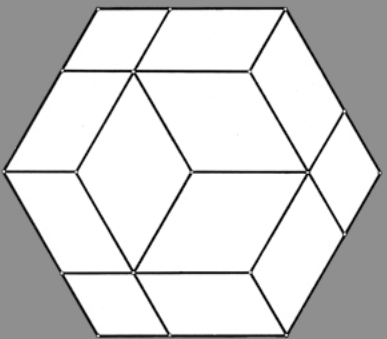
a



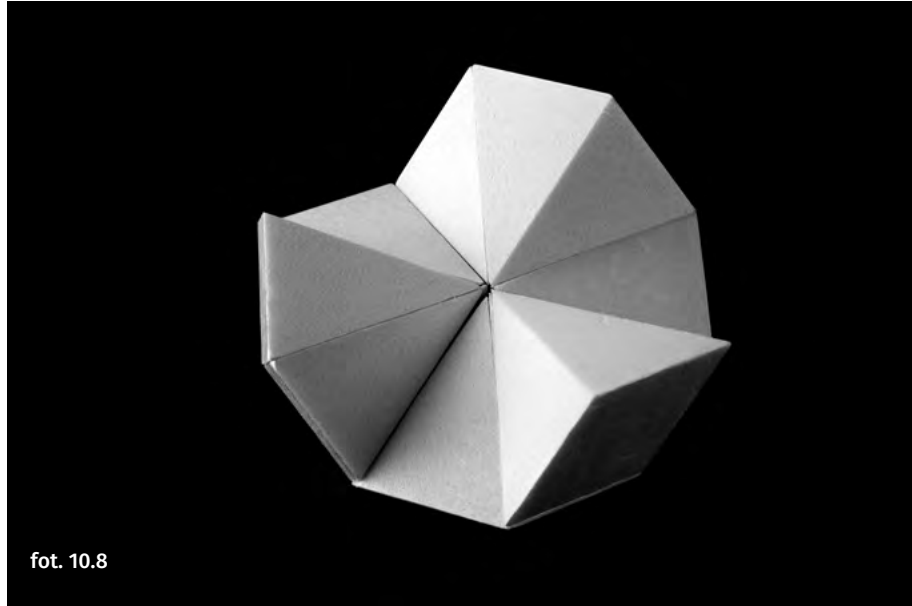
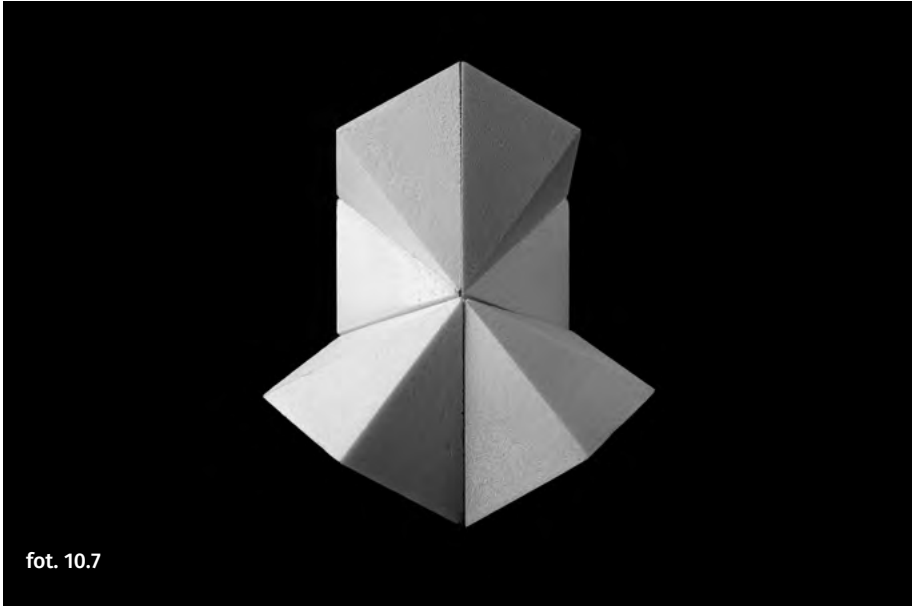
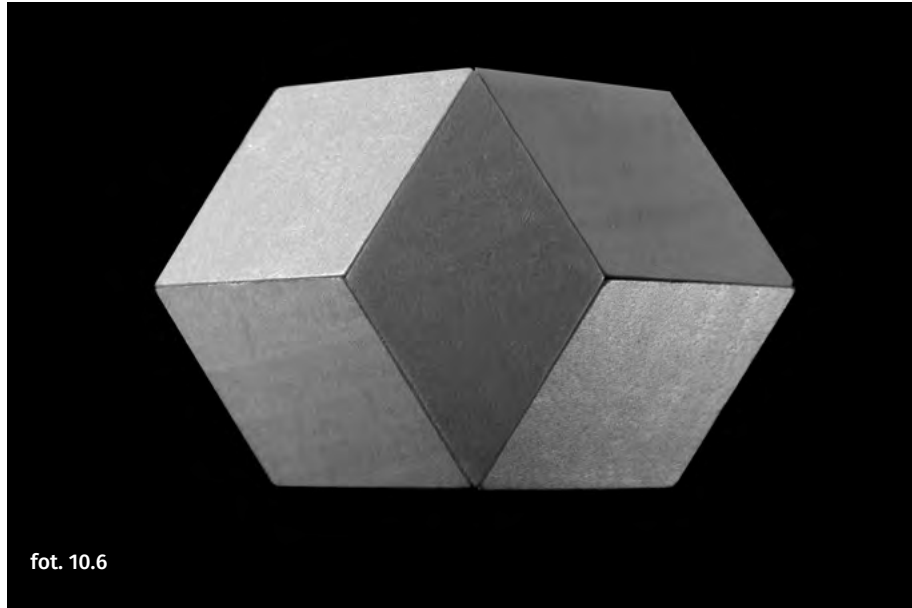
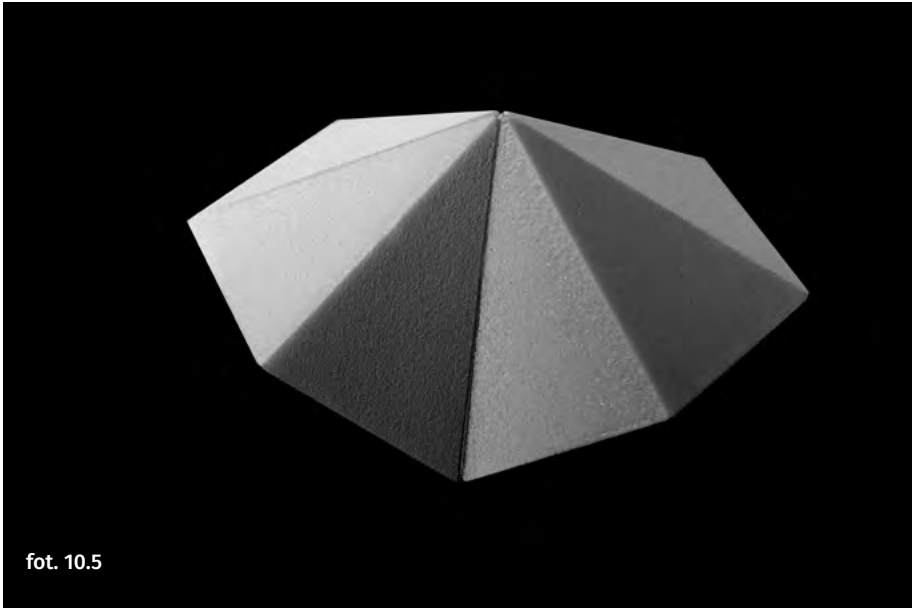
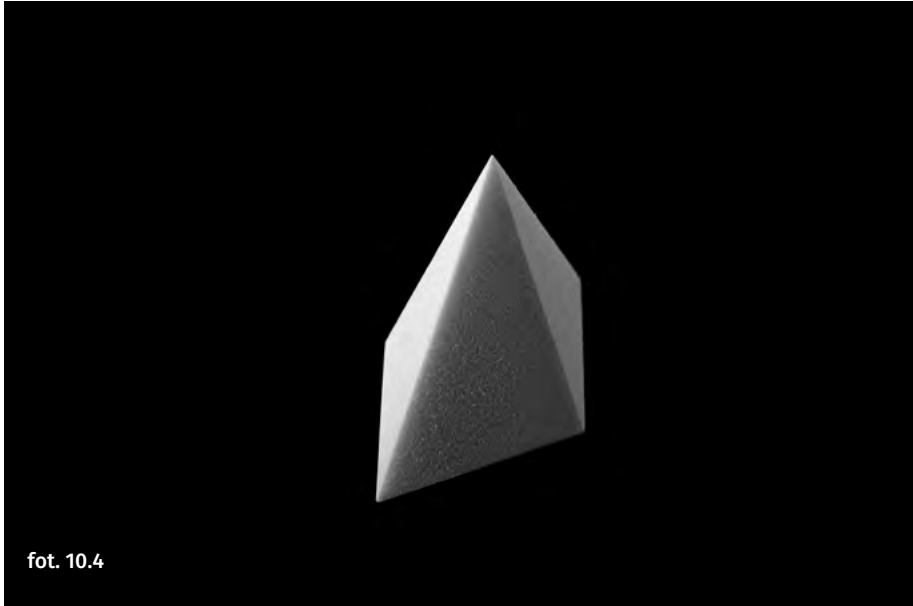
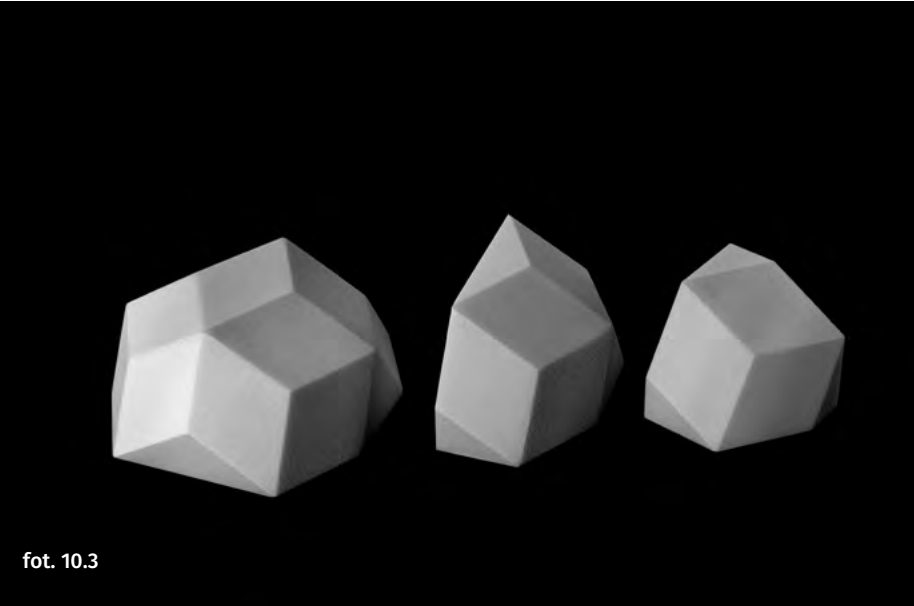
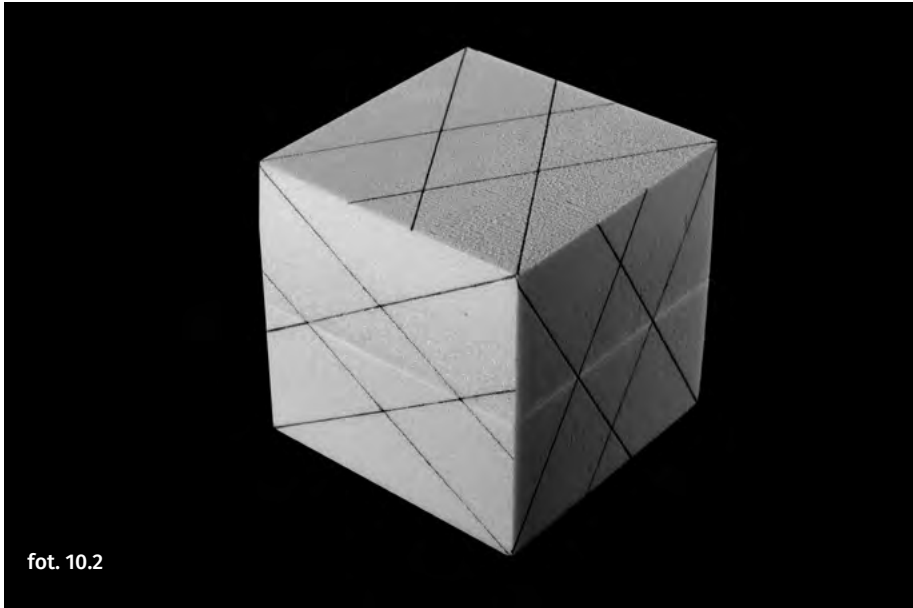
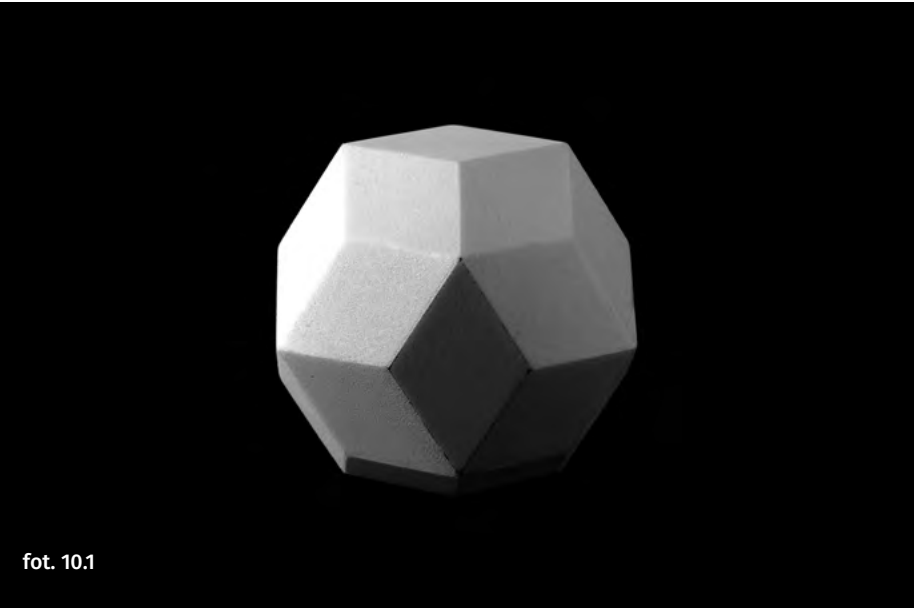
b

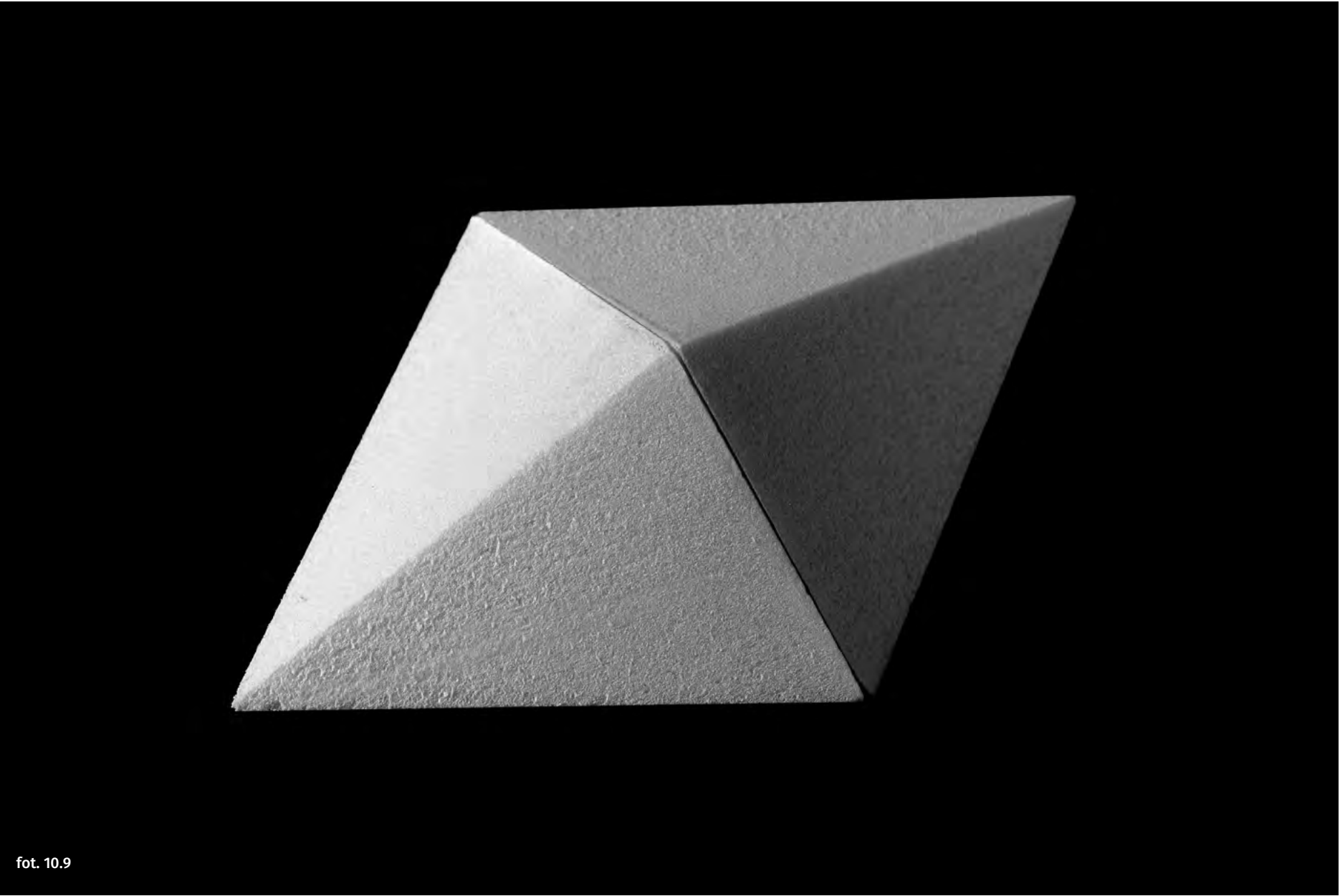


c



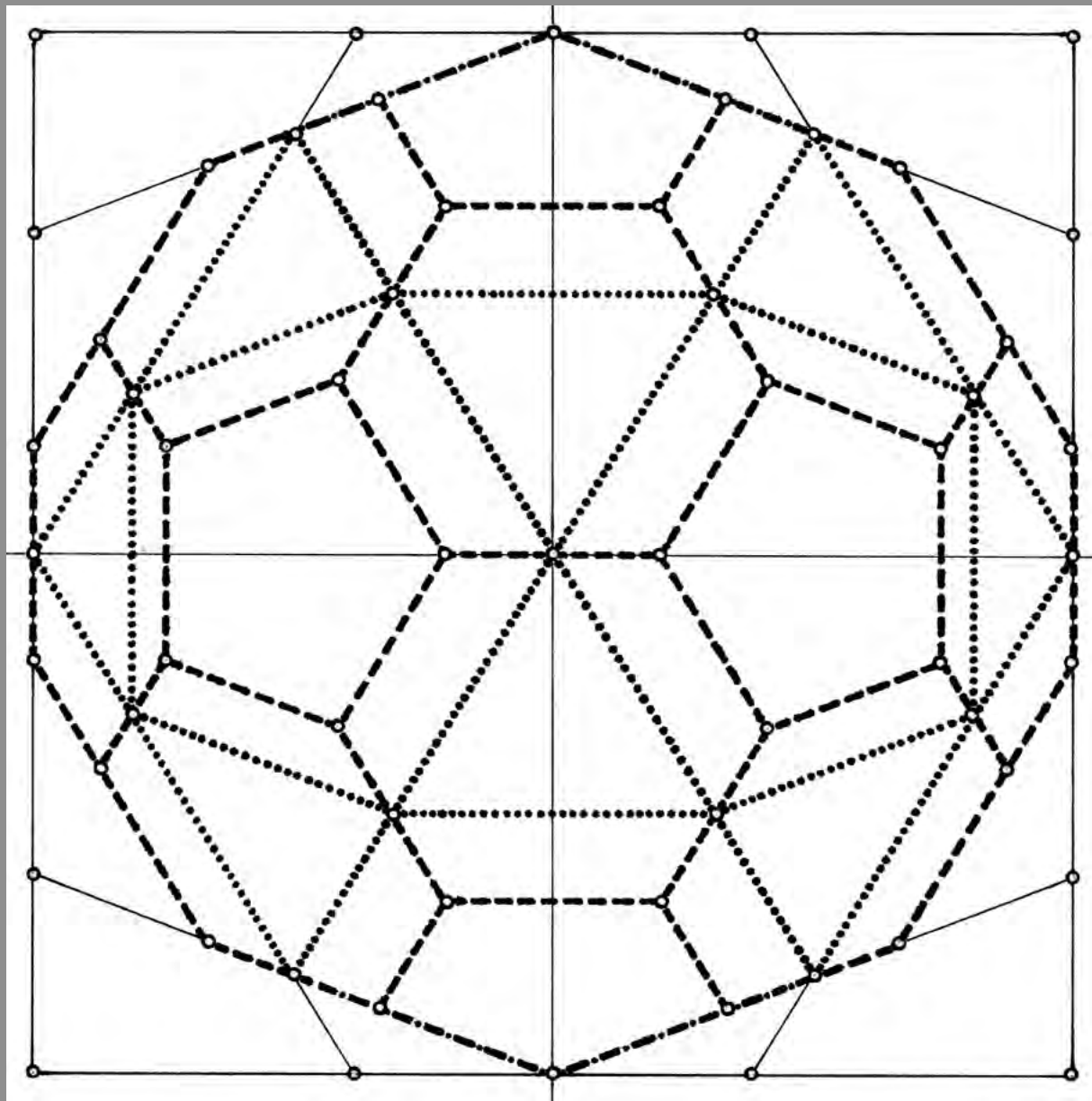
Rys. 10.2 TRZYDZIEŚTOŚCIAN ROMBOWY, szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony wierzchołka I z kątem dwuściennym c) od strony wierzchołka D.





Rys. IV. GRUPA DODEKAEDRU; dwie bryły foremne ścięte: D/I, I/D

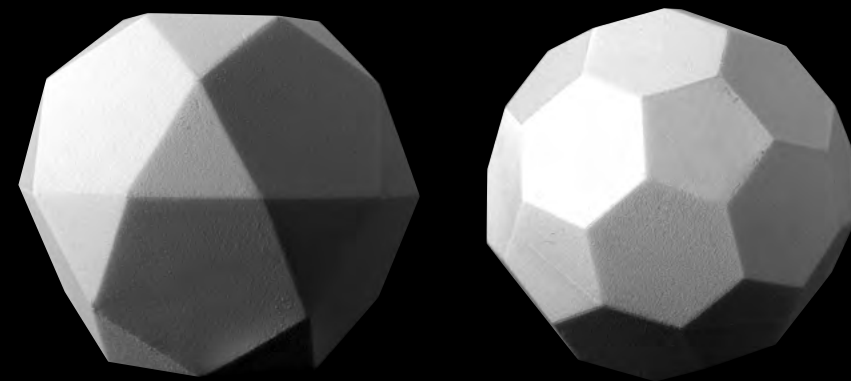
- linia kropkowana – DODEKAEDR ŚCIĘTY
- linia przerywana – IKOSAEDR ŚCIĘTY
- linia cienka – HEKSAEDR opisany na obu bryłach oraz zarysy brył foremnych



IV

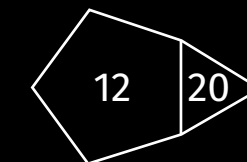
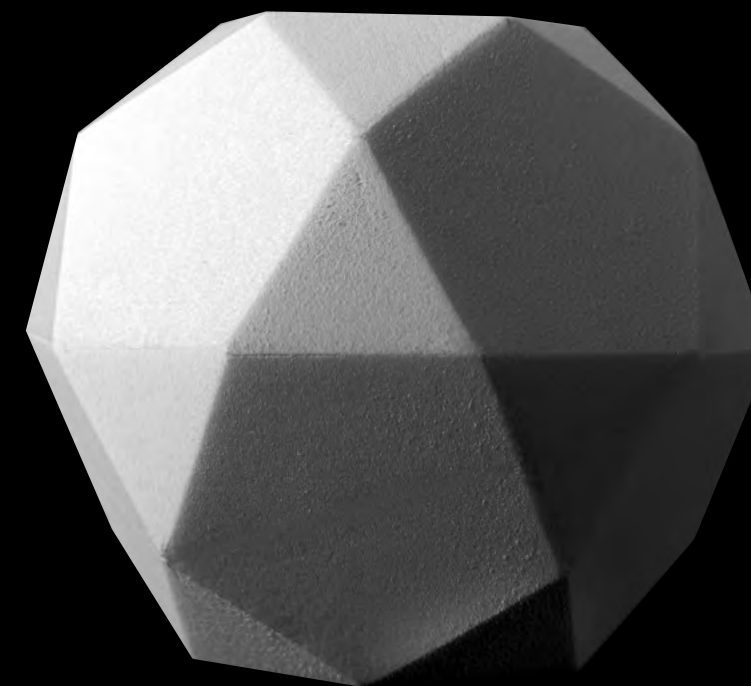
GRUPA DODEKAEDRU

D/I I/D



11

**DODEKAEDR
ŚCIEŹY D/I**



DODEKAEDR ŚCIĘTY D/I

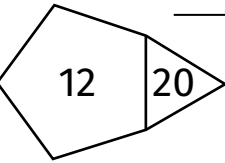
Dwunastodwuziestościan

Powstaje przez ścięcie naroży Dodekaedru do połowy długości jego krawędzi. Jest to trzydziestodwuścian półforemny o dwunastu ścianach pięciobocznych i dwudziestu ścianach trójkątnych. D/I można wpisać w jedną powierzchnię sferyczną (rys. 11.1).

D/I nie traci piękna Dodekaedru ani elegancji Ikosaedru. Piękno tej bryły pochodnej staje się bardziej wyrafinowane, linie krawędzi nie tyle zbiegają się w wierzchołkach, co przecinają się w nich tworząc dekoracyjny ornament na bryle.

Szkielet zewnętrzny tworzy trzydzieści wierzchołków połączonych sześćdziesięcioma krawędziami. W każdym wierzchołku zbiegają się cztery krawędzie pod kątem 72° w stosunku do przekątnej bryły. Przeciwległe ściany pięcioboczne i przeciwległe ściany trójkątne są wzajemnie równoległe i przekręcone analogicznie do brył bazowych D oraz I. Każda ściana pięcioboczna styka się z pięcioma ścianami trójkątnymi. A każda ściana trójkątna styka się z trzema ścianami pięciobocznymi. Kąt dwuścienny jest jeden i wynosi 143° ($63^\circ 30' + 79^\circ 30'$) (rys. 11.2 c).

D/I stanowi wspólną część przenikających się brył foremnych, a więc można ją wykonać z Ikosaedru ścinając jego naroża do połowy krawędzi. Zachodzi tu pełna analogia z H/O z grupy Heksaedru (Graf zbiorczy, str 116).



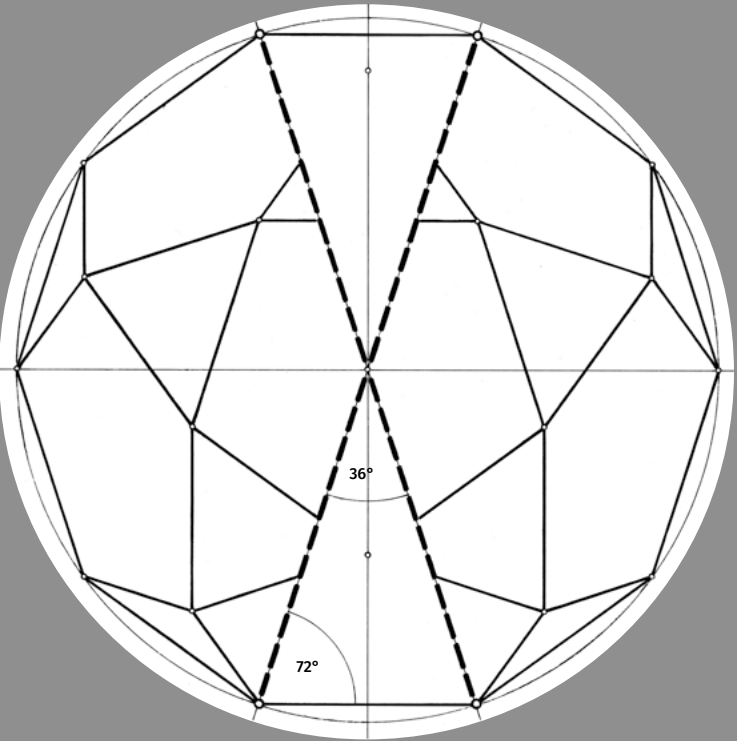
Kontur bryły w charakterystycznych rzutach przybiera kształt ośmioboku nieforemnego, dziesięcioboku foremnego i dwunastoboku nieforemnego (rys. 11.2 a, b, c).

Bryłą dualną do D/I jest dwunastościan popiłatny¹⁶ zbudowany z sześćdziesięciu trójkątów równoramiennych. Natomiast D/I jest bryłą dualną do trzydziestościanu rombowego.

Ortogonalny podział D/I daje nam równe części: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{8}$. Ósme części występują w wersji lewej i prawej (fot. 11.2).

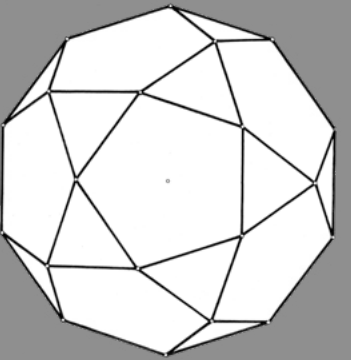
Strukturalny podział D/I rozбивa bryłę na 32 niejednorodne ostrosłupy: 12 o podstawie pięcioboku – o kątach dwuściennych $63^\circ 30'$ przy podstawie i $116^\circ 30'$ między ścianami bocznymi, oraz 20 o podstawie trójkąta – o kątach dwuściennych $79^\circ 30'$ przy podstawie i $63^\circ 30'$ między ścianami bocznymi (fot. 11.3). Z jednostek strukturalnych można składać dowolne fragmenty całości np. z siedmiu jednostek (fot. 11.4, 11.5), ale równe części mogą być cztery – tj. $\frac{1}{4}$ bryły, oraz dwie – tj. $\frac{1}{2}$ bryły. Ćwiartka bryły składa się z trzech ostrosłupów pięciobocznych i pięciu trójkątnych. Połowa bryły składa się z sześciu ostrosłupów pięciobocznych i dziesięciu trójkątnych (fot. 11.6).

16 Galeria wielościanów – str. 87

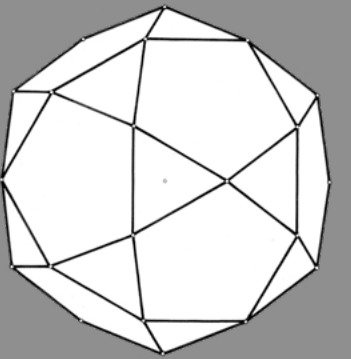


Rys. 11.1 DODEKAEDR ŚCIĘTY, fragment szkieletu wewnętrznego z kątami w jednym rzucie od strony ściany.

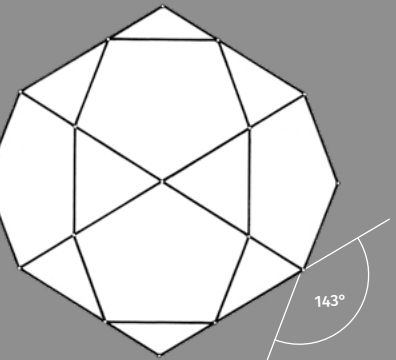
a



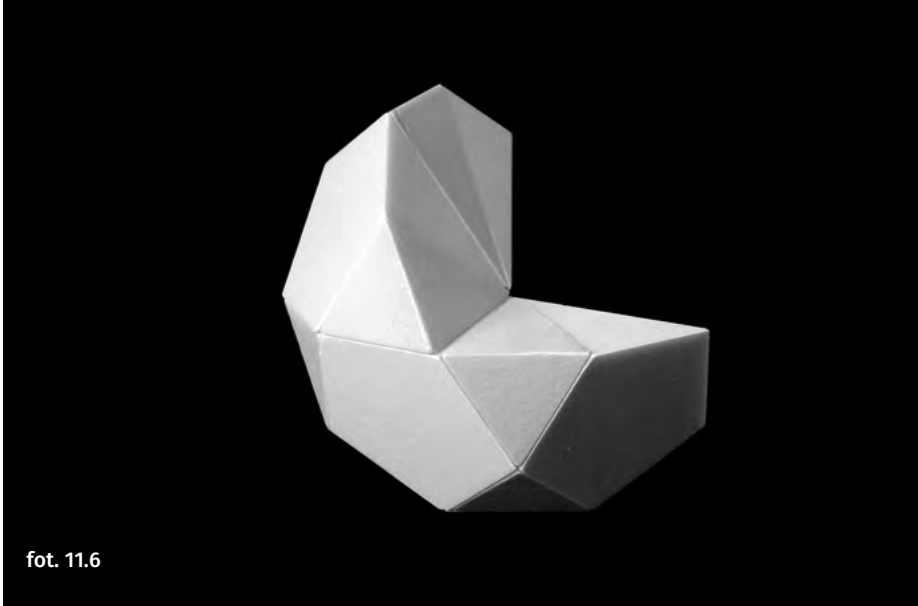
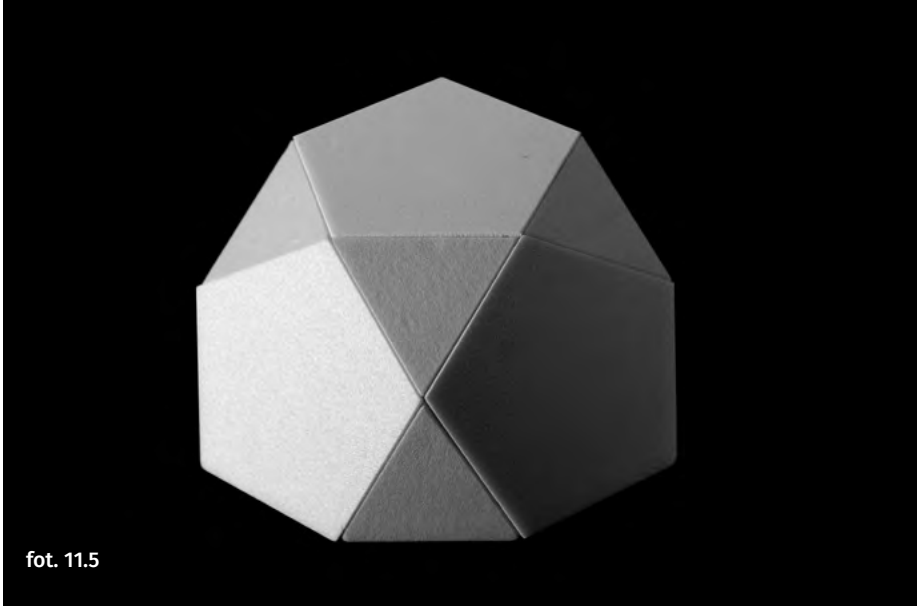
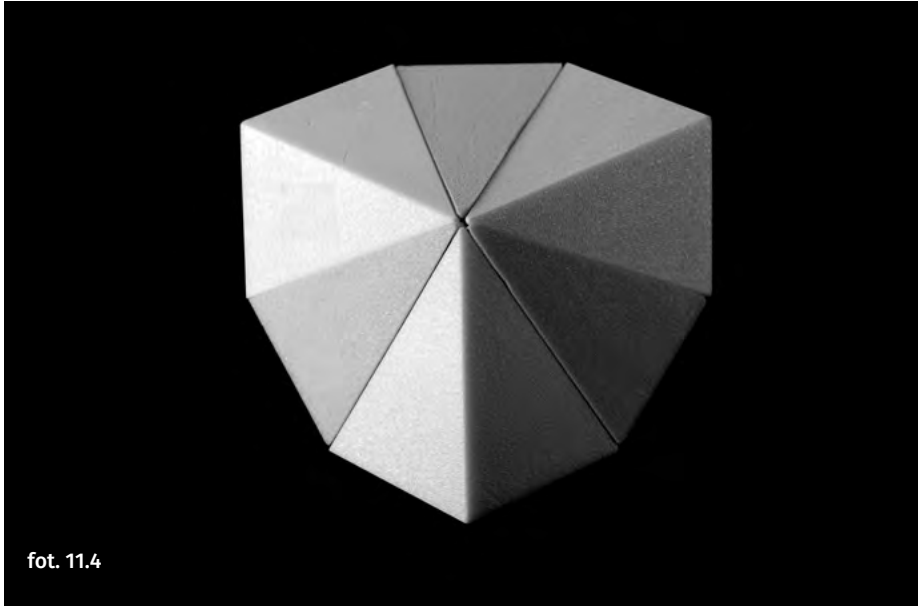
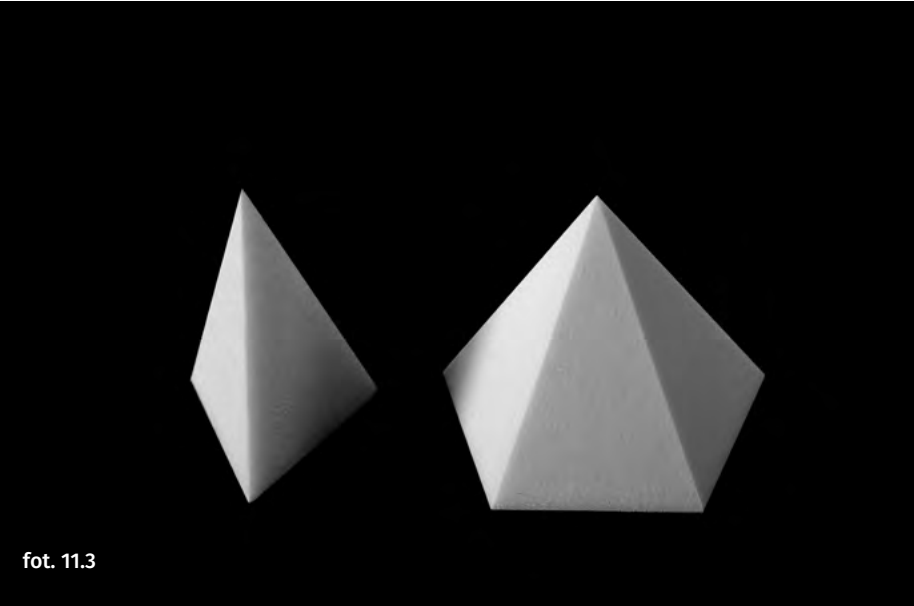
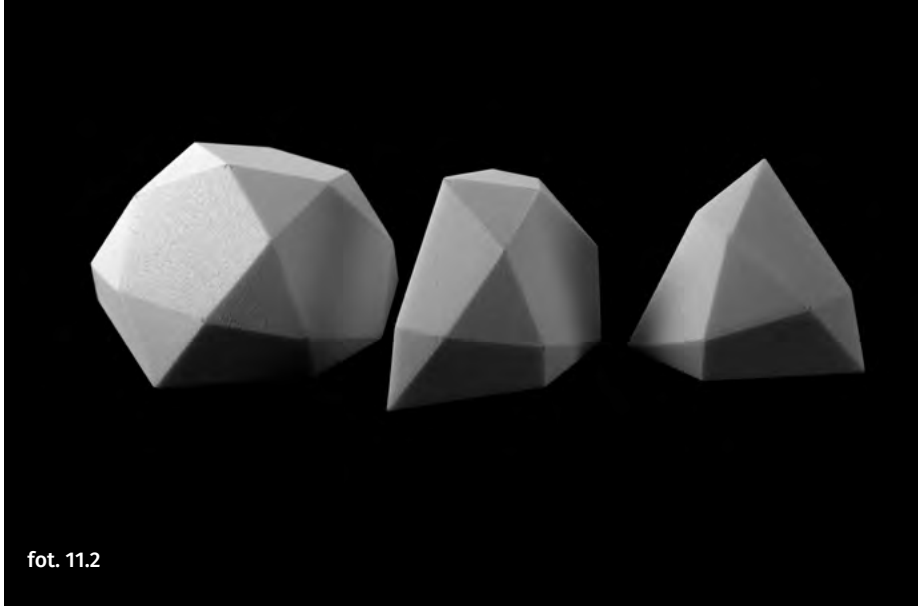
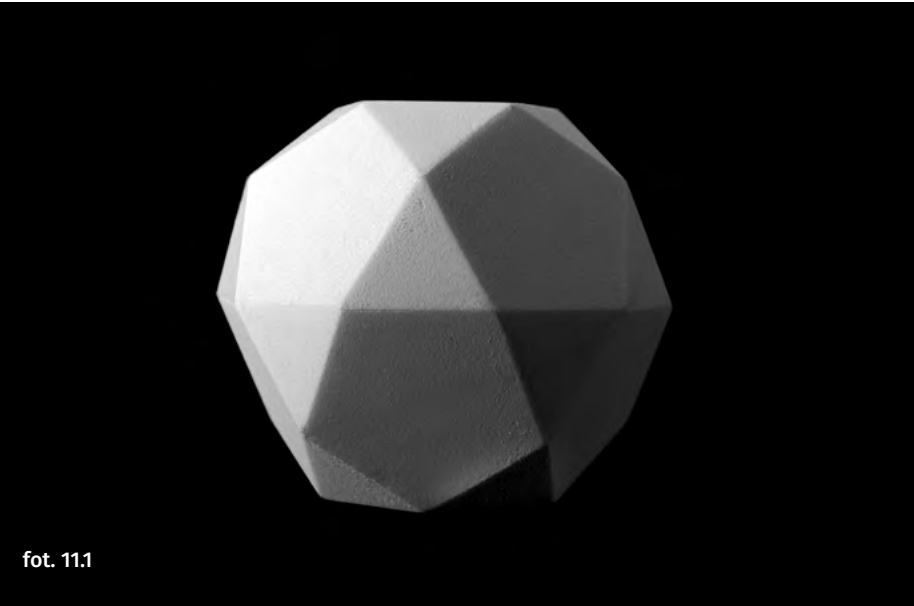
b



c

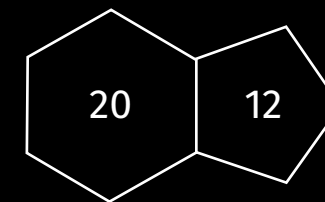
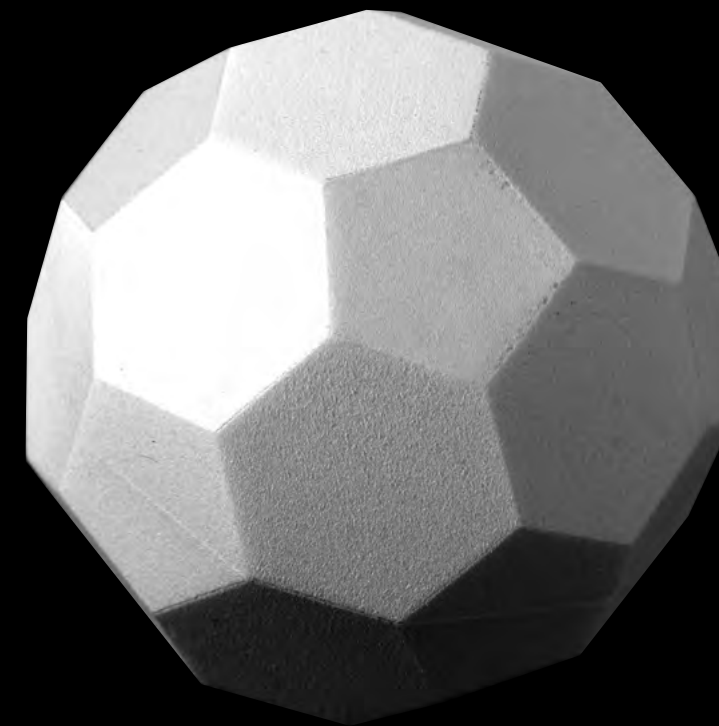


Rys. 11.2 DODEKAEDR ŚCIĘTY, szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony naroża ściętego c) od strony wierzchołka z kątem dwuściennym.



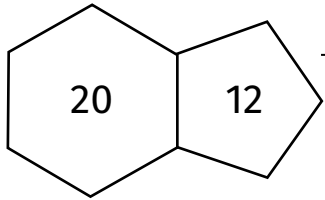
12

**IKOSAEDR
ŚCIEŹY I/D**



IKOSAEDR ŚCIĘTY I/D

Dwudziestodwunastościan



Powstaje przez ścięcie naroży Ikosaedru o $\frac{1}{3}$ długości krawędzi. Jest to trzydziestodwuścian półforemny o dwudziestu ścianach sześciobocznych i dwunastu ścianach pięciobocznych. I/D można wpisać w jedną powierzchnię sferyczną (rys. 12.1).

Bryła o największej liczbie wierzchołków i krawędzi, dlatego jest najbardziej zbliżona do powierzchni sferycznej i przypomina piłkę nożną. Suma kątów wokół naroża jest największa z grupy Dodekaedru. Tym bardziej dominująca jest całkowita suma kątów ($\rightarrow$ Tabela zbiorcza). Bryła sprawia wrażenie jednorodności, co wynika z niewielkiego zróżnicowania kształtu i wielkości ścian. Dlatego trudno ją pomylić z D/I, który ma tę samą liczbę ścian, ale wyraźniej zróżnicowanych.

Szkielet zewnętrzny tworzy sześćdziesiąt wierzchołków połączonych dziewięćdziesięcioma krawędziami. W każdym wierzchołku zbiegają się trzy krawędzie pod kątem $78^{\circ}30'$ w stosunku do przekątnej bryły. Przeciwległe ściany sześcioboczne są wzajemnie równoległe, a przeciwległe ściany pięcioboczne są wzajemnie równoległe i przekręczone o 36° wokół osi, przechodzącej przez ich środki. Każda ściana sześcioboczna styka się z trzema sześciobocznymi i trzema pięciobocznymi, a każda ściana pięcioboczna styka się z pięcioma sześciobocznymi. Kąty dwuściennie są dwa: pomiędzy ścianami sześciobocznymi $138^{\circ}30'$

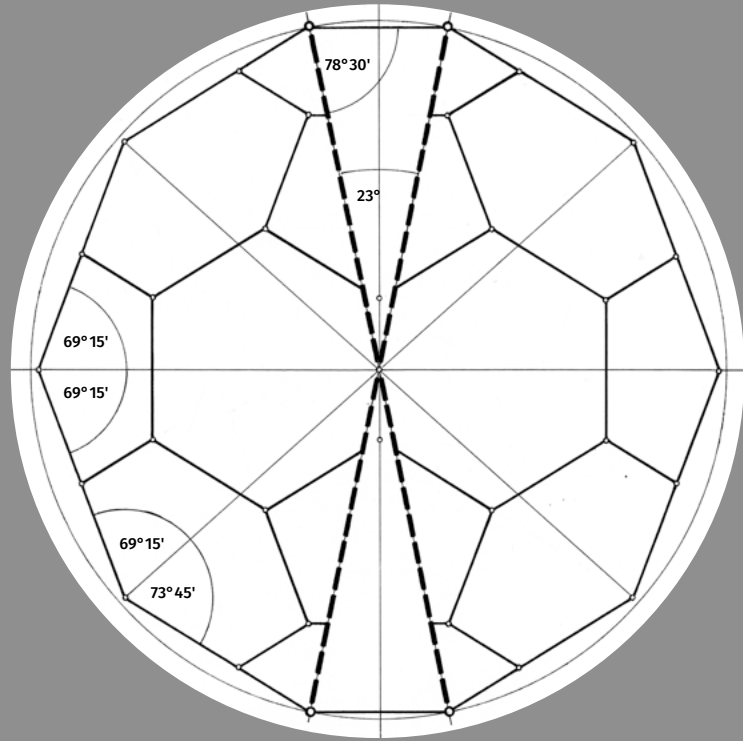
($2 \times 69^{\circ}15'$) i pomiędzy ścianą pięcioboczną a sześcioboczną 143° ($69^{\circ}15' + 73^{\circ}45'$) (rys. 12.1).

Kontur I/D w charakterystycznych rzutach przybiera kształt dziesięcioboku nieforemnego, osiemnastoboku nieforemnego i dwudziestoboku nieforemnego (rys. 12.2 a, b, c).

Bryłą dualną do I/D jest, podobnie jak w przypadku D/I, dwunastościan popiętny zbudowany z sześćdziesięciu trójkątów równoramiennych, ale innych niż w przypadku D/I.

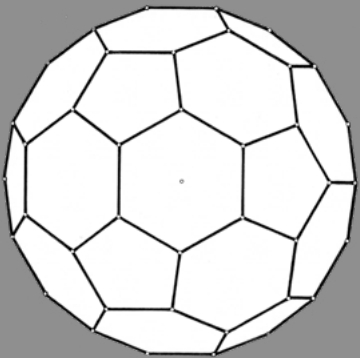
Ortogonalny podział D/I daje nam równe części: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{8}$. Ósme części występują w wersji lewej i prawej (fot. 12.2).

Strukturalny podział D/I rozбивa bryłę na 32 niejednorodne ostrosłupy: 20 o podstawie sześcioboku – o kątach dwuściennych $69^{\circ}15'$ przy podstawie i 124° między ścianami bocznymi, oraz 12 o podstawie pięcioboku – o kątach dwuściennych $73^{\circ}45'$ przy podstawie i 112° między ścianami bocznymi (fot. 12.3). Z jednostek strukturalnych można składać dowolne fragmenty całości, np. z czterech jednostek (fot. 12.4, 12.5). Ale równe części mogą być cztery – tj. $\frac{1}{4}$ bryły, oraz dwie – tj. $\frac{1}{2}$ bryły. Ćwiartka składa się z trzech ostrosłupów pięciobocznych i pięciu ostrosłupów sześciobocznych (fot. 12.6, 12.7), a połowa składa się z sześciu ostrosłupów pięciobocznych i dziesięciu sześciobocznych.

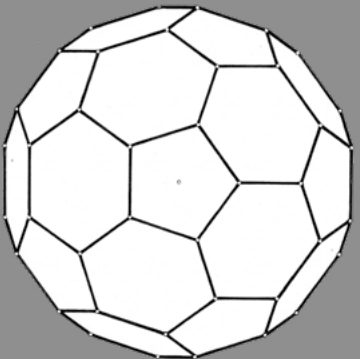


Rys. 12.1 IKOSAEDR ŚCIĘTY, fragment szkieletu wewnętrznego z kątami w jednym rzucie od strony krawędzi z oznaczeniem dwóch różnych kątów dwuściennych.

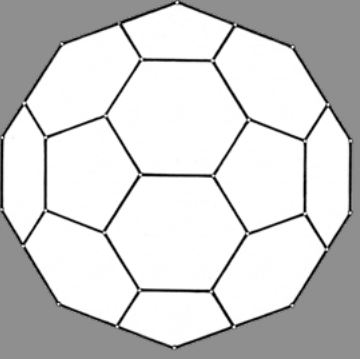
a



b



c



Rys. 12.2 IKOSAEDR ŚCIĘTY, szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony naroża ściętego c) od strony krawędzi.

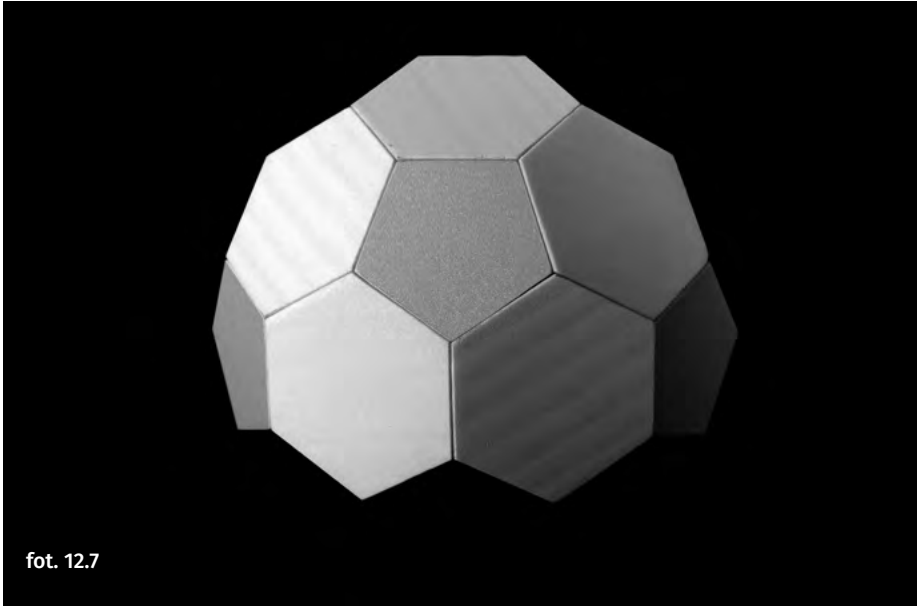
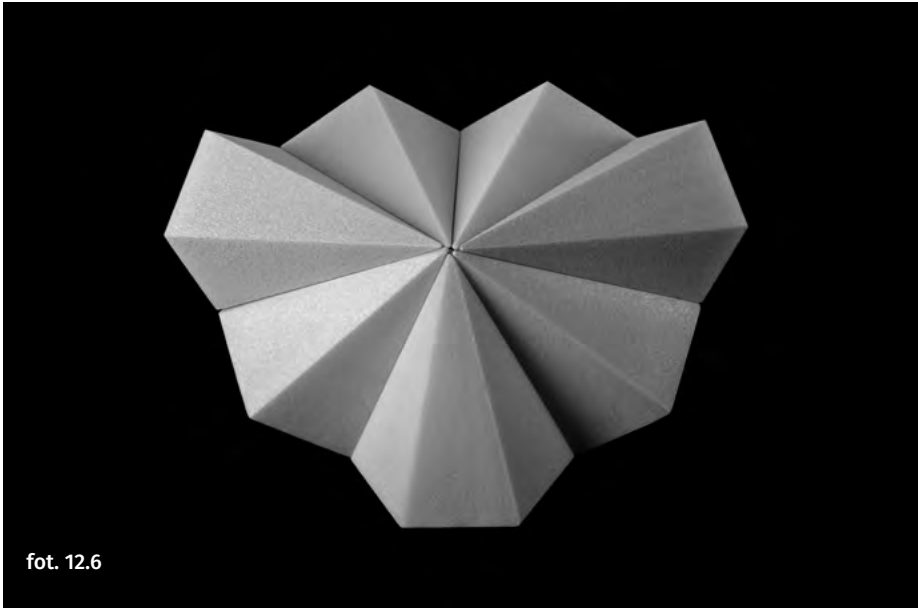
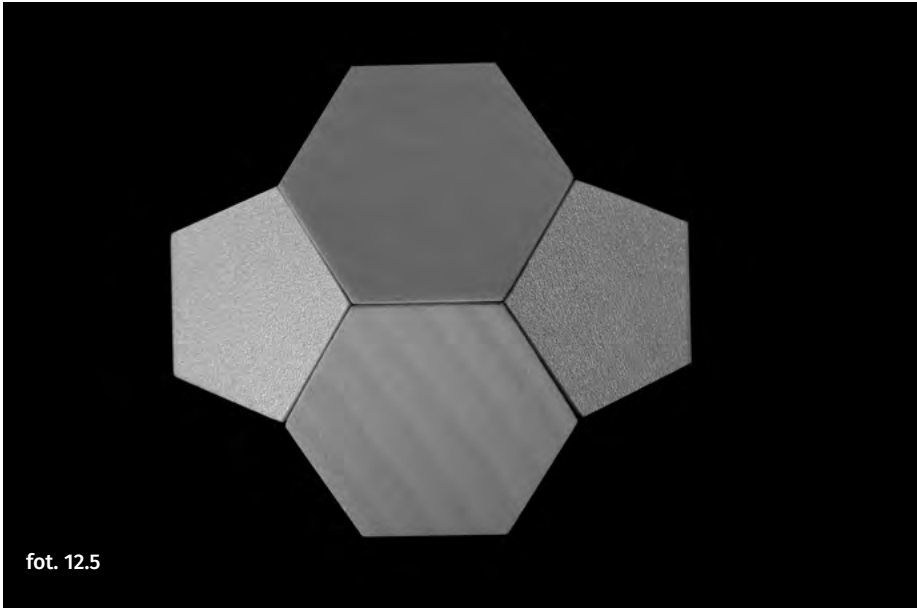
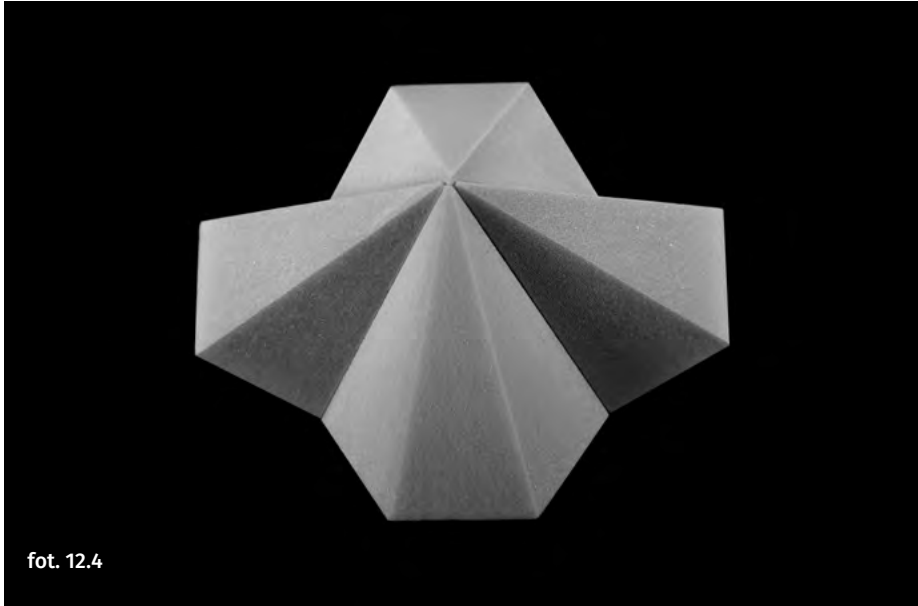
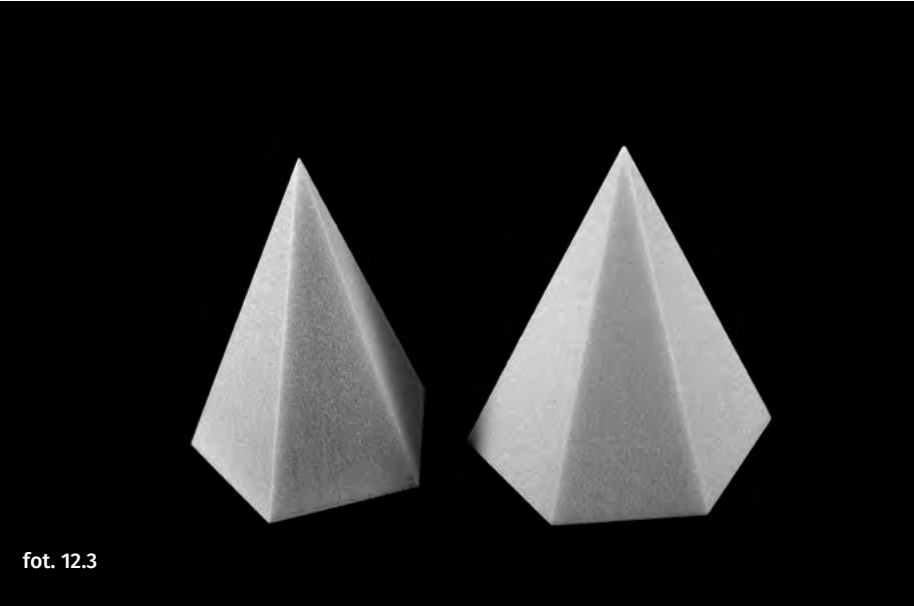
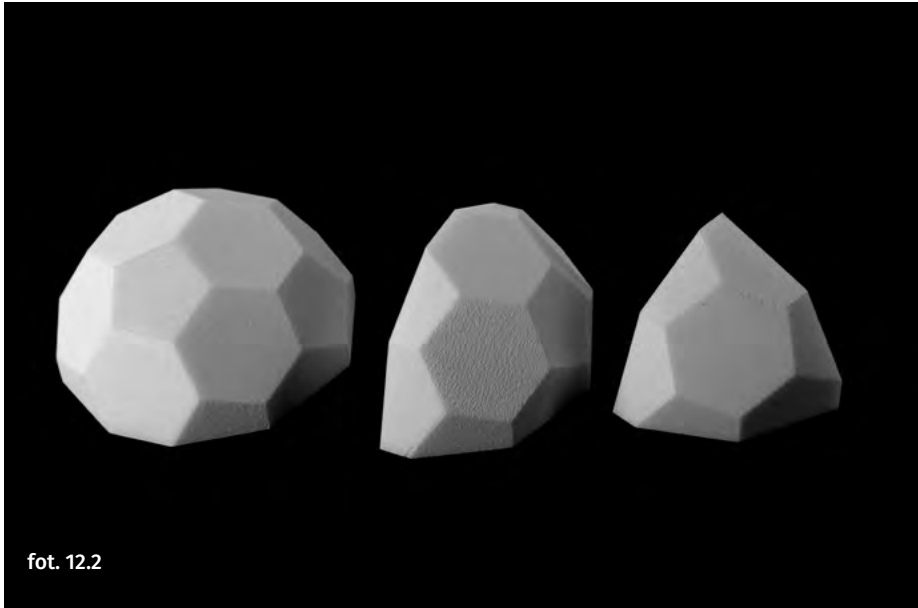
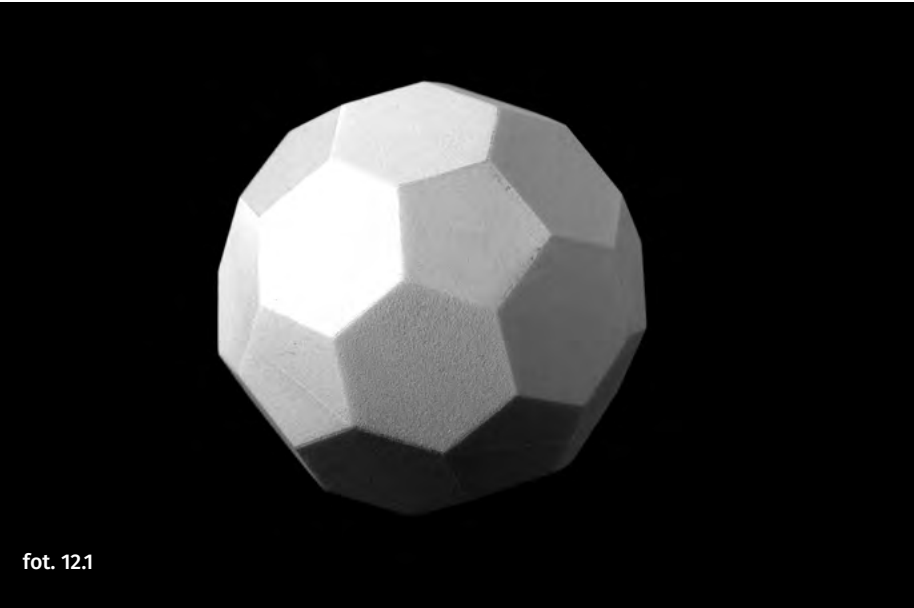


TABELA ZBIORCZA

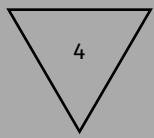
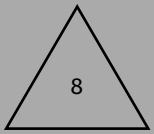
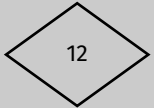
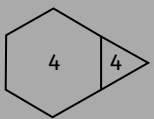
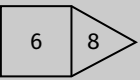
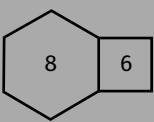
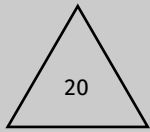
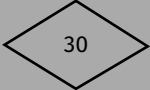
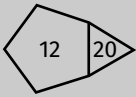
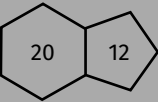
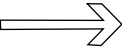
			LICZBA				KĄT			SUMA KĄTÓW	
L.P.	skrót nazwy	znak	wierzchoł- ków	krawędzi	ścian	krawędzi w narożu	środkowy	krawędziowy	dwuścienny	wokół naroża	całkowita
1.	T		4	6	4	3	109°28' 54°46' × 2	35°16'	70°32' 35°16' × 2	60° × 3 = 180°	180° × 4 = 720°
2.	H		8	12	6	3	70°32' 35°16' × 2	54°44'	90° 45° × 2	90° × 3 = 270°	270° × 8 = 2160°
3.	O		6	12	8	4	90° 45° × 2	45°	109°28' 54°44' × 2	60° × 4 = 240°	240° × 6 = 1440°
4.			14	24	12	3/4	54°44'	54°44' 70°32'	120° 60° × 2	109°28' × 3 = 328°24' 70°32' × 4 = 282°8'	328°24' × 8 = 2627°12' 282°8' × 6 = 1692°48' razem 4320°
5.	T/T		12	18	8	3	50°30'	64°45'	70°32' 109°28' 35°16' + 70°32'	(120° × 2) + 60° = 300°	300° × 12 = 3600°
6.	H/O		12	24	14	4	60°	60°	125°16' 54°44' + 70°32'	(90° × 2) + (60° × 2) = 300°	300° × 12 = 3600°
7.	O/H		24	36	14	3	37°	71°30'	109°28' 125°16' 54°44 + 70°32'	(120° × 2) + 90° = 330°	330° × 24 = 7920°

TABELA ZBIORCZA

			LICZBA				KĄT			SUMA KĄTÓW	
L.P.	skrót nazwy	znak	wierzchoł- ków	krawędzi	ścian	krawędzi w narożu	środkowy	krawędziowy	dwuścienny	wokół naroża	całkowita
8.	D		20	30	12	3	41°30' 20°45' × 2	69°15'	116°30' 58°15' × 2	108° × 3 = 324°	324° × 20 = 6480°
9.	I		12	30	20	5	63°30' 31°45' × 2	58°15'	138°30' 69°15' × 2	60° × 5 = 300°	300° × 12 = 3600°
10.			32	60	30	3/5	37°30'	63°30' 79°	144° 72° × 2	116°30' × 3 = 349°30' 63°30' × 5 = 317°30'	349°30' × 20 = 6990° 317°30' × 12 = 3810° razem 10800°
11.	D/I		30	60	32	4	36°	72°	143° 63°30' + 79°30'	(108° × 2) + (60° × 2) = 336°	336° × 30 = 10080°
12.	I/D		60	90	32	3	23°	78°30'	138°30' 143° 69°15' + 73°45'	(120° × 2) + 108° = 348°	348° × 60 = 20880°

Podział brył na grupy i rodzaje powiązań między bryłami

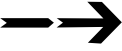
POWIĄZANIA DUALNE JEDNOSTRONNE



POWIĄZANIA DUALNE WZAJEMNE



PRZEKSZTAŁCENIE PRZEZ ŚCINANIE NAROŻY BRYŁ FOREMNYCH

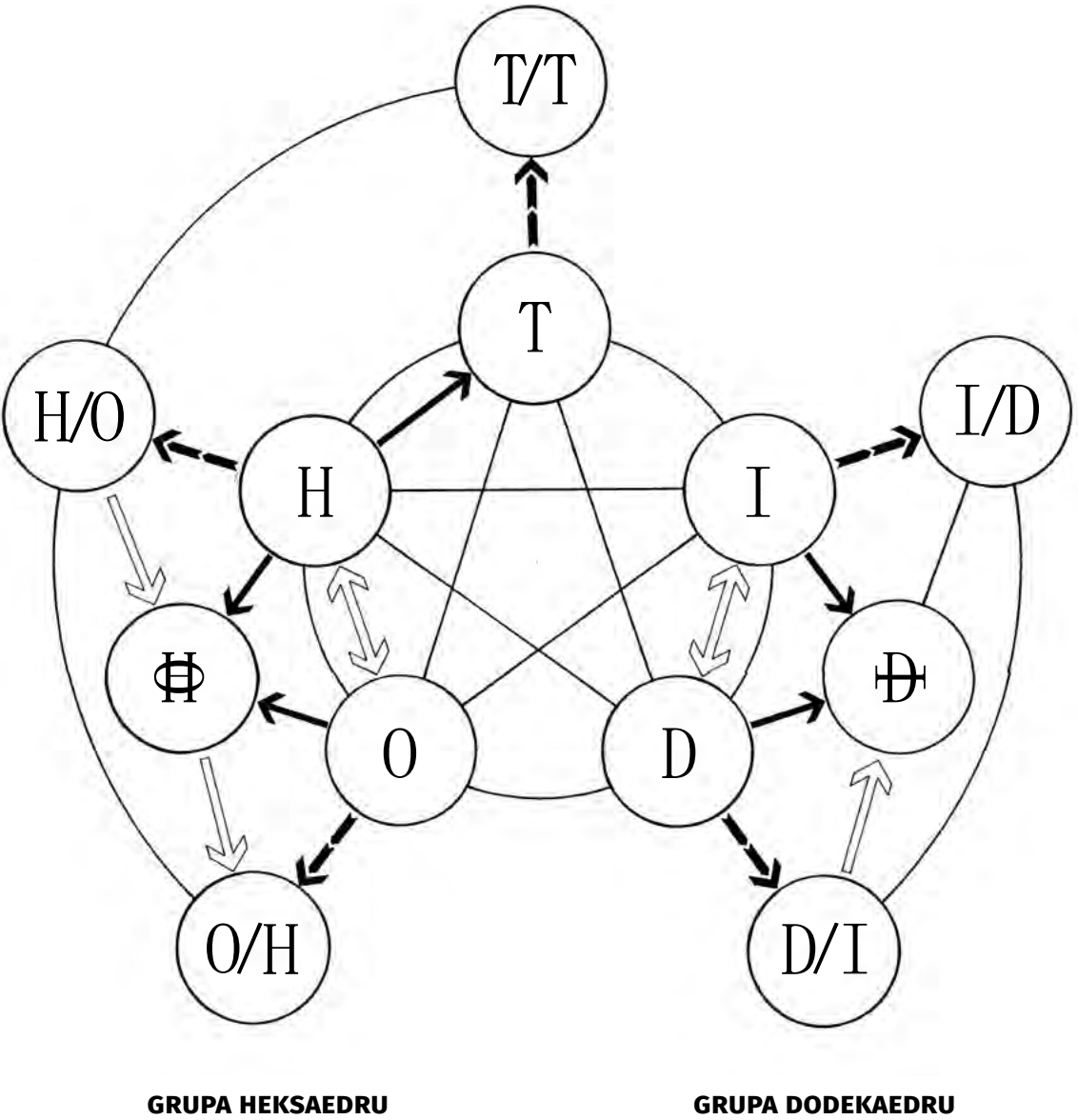


POWIĄZANIA STRUKTURALNE



INNE POWIĄZANIA

GRAF ZBIORCZY



Podsumowanie

Wszystkie prezentowane na fotografiach bryły zostały wykonane przez autora w litym materiale – gęstym styrodurze – przy pomocy cienkiego drutu oporowego, aby zminimalizować rzaz. Wykorzystano specjalne szablony kątów oraz różne przyrządy pozycjonujące obiekty podczas operacji cięcia. Poza szlifowaniem niektórych powierzchni obiekty nie podlegały zabiegom wykańczającym.

Wszystkie prezentowane w studium rysunki zostały wykonane przez autora na papierze przy pomocy narzędzi i przyborów kreślarskich.

Cel był taki, aby badane obiekty, ich fotografie i rysunki oraz ujednolicone oznaczenia i opisy tworzyły możliwie spójną całość. Dzięki temu łatwiej będzie je porównywać, odnajdywać wzajemne powiązania i różnice – by lepiej je zrozumieć.

Niniejsze studium z pewnością nie wyczerpuje tematu, zwraca jednak uwagę na spostrzeżone i opracowane przez autora właściwości brył i sposoby ich modelowania:

- Lepiej jest określać strukturę brył wychodząc od kąta wewnętrznego i kątów krawędziowych (patrz rysunki z cyfrą 1 na drugiej pozycji);
- W bryłach dualnych kąt krawędziowy jednej bryły jest równy połowie kąta dwuściennego drugiej bryły;
- Można wykonać Oktaedr z Heksaedru przy tej samej długości krawędzi obu brył;

- $\frac{1}{8}$ ortogonalna Oktaedru ściętego jest tożsama z $\frac{1}{2}$ skośną Heksaedru, z czego wynika możliwość wykonania monolitu O/H z Heksaedru poprzez odpowiednie ścięcie jego naroży;
- Opracowanie sposobu wykonania trzydziestościanu rombowego z Heksaedru;
- Odkrycie, że $\frac{1}{12}$ strukturalna dwunastościanu rombowego wynika z przekształcenia $\frac{1}{6}$ strukturalnej Heksaedru.

Studium wybranych brył można rozwijać badając więcej przypadków kombinacji części brył. Można także pogłębić badanie możliwości pełnej zabudowy przestrzeni częściami brył mających ku temu specjalne predyspozycje, np. Dwunastościan rombowy czy Oktaedr ścięty. Zdecydowanie więcej możliwości kryje się w prostych obiektach z grupy Heksaedru niż w bardziej skomplikowanych z grupy Dodekaedru.

Oczywiście można rozwinąć studium poddając podobnym badaniom inne obiekty. Pole możliwości jest szerokie. Warto podkreślić zadziwiający potencjał poznawczy i formotwórczy, jaki kryje się w bryłach.

Autor wyraża nadzieję, że jego wieloletnia praca przyczyni się choć trochę do zainteresowania projektantów własnymi poszukiwaniami związków pomiędzy strukturą a morfologią brył lub choćby odkrywaniem nowych form czy nowych konfiguracji przestrzennych.

Abstrakt

Nie jestem matematykiem, tylko projektantem wzornictwa przemysłowego, który docenia znaczenie geometrii w tym zawodzie. Natomiast, jako nauczyciel akademicki, prowadzący od wielu lat zajęcia praktyczne z projektowania trójwymiarowego, zauważam wśród studentów słabnące zainteresowanie wiedzą z geometrii i geometrią wykreślną. Wirtualne wizualizacje brył nie zastąpią realnych działań i doświadczeń osobistych na modelach fizycznych, które są niezbędne dla rozwoju wyobraźni przestrzennej, wspomagającej proces twórczego rozwiązywania zadań projektowych.

W studium prezentuję systematyczne działania praktyczne na wybranych dwunastu bryłach, pięciu foremnych i siedmiu pochodnych, które zostały podzielone na dwie grupy: grupę Heksaedru i grupę Dodekaedru. Bryłą-matką dla wszystkich wybranych brył będzie Heksaedr, który jest równocześnie zwornikiem łączącym obie grupy. Praca zawiera ujednolicone opisy brył (nazwy, symbole, znaki graficzne), ujednolicone rysunki, ukazujące budowę wewnętrzną i zewnętrzną, oraz wzajemne powiązania kątowe i wymiarowe brył

w grupach. Główną częścią pracy są fotografie dokumentujące działania na bryłach fizycznych i sposoby realizacji brył monolitycznych wraz z ich fragmentami wynikającymi z trzech różnych sposobów podziału całości na równe części, a także wybrane kombinacje tych części, przekształcenia, hybrydy, deformacje oraz badanie możliwości pełnej zabudowy przestrzeni.

Z pewnością nie wyczerpałem tematu, ale dokonałem kilku spostrzeżeń, którymi chciałem się podzielić w niniejszej pracy.

Podsumowaniem pracy jest tabela zbiorcza własności brył, zawierająca między innymi miary kątowe wewnętrzne i zewnętrzne. Tabela umożliwia porównywanie własności brył i ujawnia powiązania kątowe między nimi. A umieszczony za tabelą graf zbiorczy daje wgląd w zastosowany w studium podział bryły na grupy oraz rodzaje powiązań między poszczególnymi bryłami. Uzupełnieniem studium są: uporządkowany układ pięciu brył foremnych wpisanych w jedną sferę oraz fotografia fizycznych modeli szkieletów brył foremnych wykonanych w jednolity sposób z prętów o przekroju prostokąta.

Opisy rysunków

I GRUPA HEKSAEDRU; trzy bryły foremne: T, H, O + $\mathbb{H}$ półforemna

- linia gruba – HEKSAEDR o krawędzi a
- linia średnia – dwa przenikające się TETRAEDRY o krawędzi $a\sqrt{2}$
- linia cienka podwójna – OKTAEDR o krawędzi $a\sqrt{2}$
- linia przerywana DWUNASTOŚCIAN ROMBOWY o przekątnych rombu a i $a\sqrt{2}$

II GRUPA HEKSAEDRU; trzy bryły foremne ścięte: T/T, H/O, O/H

- linia gruba – HEKSAEDR ŚCIĘTY
- linia średnia – TETRAEDR ŚCIĘTY
- linia podwójna cienka – OKTAEDR ŚCIĘTY
- linia cienka – zarysy brył foremnych

III GRUPA DODEKAEDRU; dwie bryły foremne: D, I + $\mathbb{D}$ półforemna

- linia kropkowana – DODEKAEDR o przekątnej ściany a i krawędzi b
- linia przerywana – IKOSAEDR o krawędzi a
- linia gruba – TRZYDZIEŚTOŚCIAN ROMBOWY o przekątnych rombu a i b
- linia cienka – HEKSAEDR o krawędzi a wpisany w D i opisany na trzech bryłach

IV GRUPA DODEKAEDRU; dwie bryły foremne ścięte: D/I, I/D

- linia kropkowana – DODEKAEDR ŚCIĘTY
- linia przerywana – IKOSAEDR ŚCIĘTY
- linia cienka – HEKSAEDR opisany na obu bryłach oraz zarysy brył foremnych

V Pięć brył foremnych wpisanych w jedną sferę:

- linia gruba – HEKSAEDR wpisany w D
- linia średnia – TETRAEDR
- linia cienka podwójna – OKTAEDR
- linia kropkowana – DODEKAEDR
- linia przerywana – IKOSAEDR

1.1 TETRAEDR, szkielet wewnętrzny z kątami w dwóch rzutach

1.2 TETRAEDR, szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony wierzchołka c) od strony krawędzi

2.1 HEKSAEDR, szkielet wewnętrzny z kątami w dwóch rzutach

2.2 HEKSAEDR szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony wierzchołka c) od strony krawędzi

3.1 OKTAEDR, szkielet wewnętrzny z kątami w dwóch rzutach

3.2 OKTAEDR szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony wierzchołka c) od strony krawędzi

4.1 DWUNASTOŚCIAN ROMBOWY, szkielet wewnętrzny z kątami w trzech rzutach

4.2 DWUNASTOŚCIAN ROMBOWY, szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony wierzchołka 0 c) od strony wierzchołka H

5.1 TETRAEDR ŚCIĘTY, szkielet wewnętrzny z kątami w dwóch rzutach.

5.2 TETRAEDR ŚCIĘTY, szkielet zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony naroża ściętego c) od strony krawędzi

6.1 HEKSAEDR ŚCIĘTY, szkielet wewnętrzny z kątami w trzech rzutach

- 6.2

HEKSAEDR ŚCIĘTY, szkielec zewnętrzny w trzech rzutach:
a) od strony ściany b) od strony naroża ściętego c) od strony wierzchołka
- 7.1

OKTAEDR ŚCIĘTY, szkielec wewnętrzny z kątami w dwóch rzutach
- 7.2

OKTAEDR ŚCIĘTY, szkielec zewnętrzny w trzech rzutach:
a) od strony ściany b) od strony naroża ściętego c) od strony krawędzi
- 8.1

DODEKAEDR, szkielec wewnętrzny z kątami w dwóch rzutach
- 8.2

DODEKAEDR, szkielec zewnętrzny w trzech rzutach:
a) od strony ściany b) od strony wierzchołka c) od strony krawędzi
- 9.1

IKOSAEDR, szkielec wewnętrzny z kątami w dwóch rzutach
- 9.2

IKOSAEDR, szkielec zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony wierzchołka c) od strony krawędzi
- 10.1

TRZYDZIESTOŚCIAN ROMBOWY, fragment szkielecetu we wnętrznego z kątami w jednym rzucie od strony ściany.
- 10.2

TRZYDZIESTOŚCIAN ROMBOWY, szkielec zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony wierzchołka z kątem dwuściennym c) od strony wierzchołka D
- 11.1

DODEKAEDR ŚCIĘTY, fragment szkielecetu wnętrznego z kątami w jednym rzucie od strony ściany
- 11.2

DODEKAEDR ŚCIĘTY, szkielec zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony naroża ściętego c) od strony wierzchołka (z kątem dwuściennym)
- 12.1

IKOSAEDR ŚCIĘTY, fragment szkielecetu wnętrznego z kątami w jednym rzucie od strony krawędzi z oznaczeniem dwóch różnych kątów dwuściennych
- 12.2

IKOSAEDR ŚCIĘTY, szkielec zewnętrzny w trzech rzutach: a) od strony ściany b) od strony naroża ściętego c) od strony krawędzi

Opisy fotofgrafii

- 1.1

Monolit T
- 1.2

Podział ortogonalny na dwie i cztery części
- 1.3

Podział skośny na dwie części
- 1.4

Złożenie części w nową bryłę – bliźniak T
- 1.5

Podział skośny na cztery części, $\frac{1}{4}$ bryły w dwóch ujęciach
- 1.6

Złożenie części w nowe bryły
- 1.7

Podział strukturalny, $\frac{1}{4}$ strukturalna T oraz połowa bryły złożona z dwóch ćwiartek
- 1.8

Tetraedr potrójny, T + cztery jednostki strukturalne
- 1.9

Gwiazda czteroramienna T + 4T
- 2.1

Monolit H
- 2.2

Podział ortogonalny na dwie, cztery i osiem części
- 2.3

Podział ortogonalny po przekątnej ściany na dwie, trzy i sześć części
- 2.4

Podział skośny na dwie części, $\frac{1}{2}$ skośna H
- 2.5

Złożenie części w nową bryłę – bliźniak H
- 2.6

Podział skośny po przekątnej bryły na dwie części, alternatywna $\frac{1}{2}$ skośna H
- 2.7

Złożenie części w nową bryłę – alternatywny bliźniak H
- 2.8

Podział strukturalny, $\frac{1}{6}$ strukturalna H i $\frac{1}{3}$ bryły złożona z dwóch jednostek strukturalnych
- 2.9

$\frac{1}{2}$ bryły złożona z trzech jednostek strukturalnych
- 2.10

Podział jednostki strukturalnej na dwie części i jej przekształcenie w ostrosłup rombowy
- 2.11

Złączenie dwóch jednostek strukturalnych podstawami, nowa bryła ośmiościenna
- 2.12

Rozbudowa monolitu przez przyłączanie jednostek strukturalnych
- 3.1

Monolit O
- 3.2

Monolit wykonany z Heksaedru, krawędź O jest równa krawędzi H
- 3.3

Inne bryły wyjściowe do realizacji monolitu O
- 3.4

Podział ortogonalno-strukturalny na dwie, cztery i osiem części
- 3.5

Podział skośny na dwie części, $\frac{1}{2}$ skośna O
- 3.6

Złożenie części w nową bryłę – bliźniak O
- 3.7

Hybryda złożona z $\frac{1}{2}$ skośnej O i $\frac{1}{2}$ skośnej H
- 3.8

Podział skośny czterema płaszczyznami
- 3.9

Efekt podziału: sześć Oktaedrów i osiem Tetraedrów
- 3.10

Rozbudowa monolitu przez przyłączanie jednostek strukturalnych
- 3.11

Bryły zdeformowane
- 4.1

Monolit Φ
- 4.2

Bryła wyjściowa do realizacji monolitu
- 4.3

Podział skośny na dwie części, $\frac{1}{2}$ bryły w dwóch ujęciach
- 4.4

Złożenie części w nową bryłę
- 4.5

Podział ortogonalny na dwie, cztery i osiem części
- 4.6

Nowa bryła złożona z dwóch ósemek
- 4.7

Nowa bryła po przekształceniu
- 4.8

Podział strukturalny, $\frac{1}{12}$ strukturalna i połowa bryły złożona z sześciu jednostek
- 4.9

Realizacja sześćościanów rombowych
- 4.10

Zabudowa przestrzeni monolitami Φ
- 4.11

Zabudowa przestrzeni $\frac{1}{2}$ skośną Φ
- 4.12

Przykładowy obiekt złożony z sześciu jednostek strukturalnych
- 4.13

Gwiazdzisty dwunastościan rombowy

- 4.14 Dwunastościan rombowo-kwadratowy
- 4.15 Zabudowa przestrzeni dwunastościanami rombowo-kwadratowymi
 - 5.1 Monolit $\mathbb{T}/\mathbb{T}$
 - 5.2 Podział ortogonalny na dwie części, $\frac{1}{2} \mathbb{T}/\mathbb{T}$
 - 5.3 Złożenie części w nową bryłę
 - 5.4 Złożenie części w nową bryłę
 - 5.5 Złożenie części w nową bryłę
 - 5.6 Podział skośny na dwie części
 - 5.7 Złożenie części w nową bryłę – bliźniak $\mathbb{T}/\mathbb{T}$
 - 5.8 Podział skośny na cztery części, $\frac{1}{2}$ skośna $\mathbb{T}/\mathbb{T}$ i $\frac{1}{4}$ skośna $\mathbb{T}/\mathbb{T}$
 - 5.9 Złożenie ćwiartek w nowe bryły
- 5.10 Podział strukturalny, dwie różne jednostki
- 5.11 $\frac{1}{2}$ bryły złożona z czterech jednostek, strona zewnętrzna
- 5.12 $\frac{1}{2}$ bryły złożona z czterech jednostek, strona wewnętrzna
- 5.13 Połączenie dwóch monolitów $\mathbb{T}/\mathbb{T}$
 - 6.1 Monolit $\mathbb{H}/\mathbb{O}$
 - 6.2 Podział ortogonalny na dwie, cztery i osiem części
 - 6.3 Podział skośny na dwie części, przekształcenie bryły
 - 6.4 Podział skośny, hybryda złożona z $\frac{1}{2}$ skośnej $\mathbb{H}/\mathbb{O}$ i $\frac{1}{2}$ skośnej $\mathbb{O}$
 - 6.5 Podział ortogonalny, hybryda złożona z $\frac{1}{2} \mathbb{H}/\mathbb{O}$ i $\frac{1}{2} \mathbb{H}$
 - 6.6 Podział strukturalny, dwie różne jednostki: Tetraedr i piramida
 - 6.7 Część bryły złożona z czterech jednostek, strona zewnętrzna
 - 6.8 Część bryły złożona z czterech jednostek, strona wewnętrzna
 - 6.9 Połowa bryły złożona z czterech $\mathbb{T}$ i trzech piramid
- 6.10 Połowa bryły z dodanymi trzema piramidami tworzy $\frac{1}{2}$ skośną $\mathbb{O}$
 - 7.1 Monolit $\mathbb{O}/\mathbb{H}$

- 7.2 Podział ortogonalny na dwie, cztery i osiem części
- 7.3 Dwie ósme części tworzą $\frac{1}{4}$ bryły
- 7.4 Dwie ósme części połączone ścianą sześcioboczną tworzą Heksaedr
- 7.5 Podział strukturalny, dwie różne jednostki
- 7.6 Część bryły złożona z czterech jednostek
- 7.7 $\frac{1}{2}$ bryły złożona z siedmiu jednostek, strona zewnętrzna
- 7.8 $\frac{1}{2}$ bryły złożona z siedmiu jednostek, strona wewnętrzna
- 7.9 Zabudowa przestrzeni monolitami $\mathbb{O}/\mathbb{H}$
 - 8.1 Monolit $\mathbb{D}$
 - 8.2 Bryła wyjściowa do realizacji monolitu
 - 8.3 Ortogonalny podział na dwie, cztery i osiem części
 - 8.4 Podział strukturalny, $\frac{1}{2}$ strukturalna $\mathbb{D}$
 - 8.5 $\frac{1}{6}$ bryły złożona z dwóch jednostek strukturalnych
 - 8.6 $\frac{1}{3}$ bryły złożona z czterech jednostek strukturalnych
 - 8.7 Połowa bryły złożona z sześciu jednostek strukturalnych
 - 8.8 Dwie jednostki złączone podstawami, podwójny ostrosłup pięcioboczny
 - 8.9 Dwa monolity różnie zdeformowane
- 8.10 Inna deformacja monolitu $\mathbb{D}$
 - 9.1 Monolit $\mathbb{I}$
 - 9.2 Monolit niedokończony po dwunastu cięciach
 - 9.3 Podział ortogonalny na dwie, cztery i osiem części
 - 9.4 Podział strukturalny, $\frac{1}{20}$ strukturalna $\mathbb{I}$
 - 9.5 Część bryły złożona z czterech jednostek, strona wewnętrzna
 - 9.6 Część bryły złożona z czterech jednostek, strona zewnętrzna
 - 9.7 Część bryły złożona z ośmiu jednostek, strona wewnętrzna

- 9.8 Część bryły złożona z ośmiu jednostek, strona zewnętrzna
- 9.9 $\frac{1}{2}$ bryły złożona z dziesięciu jednostek, strona wewnętrzna
- 9.10 Monolit zdeformowany
- 10.1 Monolit $\mathbb{H}$
- 10.2 Bryła wyjściowa do realizacji monolitu
- 10.3 Podział ortogonalny na dwie, cztery i osiem części
- 10.4 Podział strukturalny, $\frac{1}{30}$ strukturalna $\mathbb{H}$
- 10.5 $\frac{1}{6}$ bryły złożona z pięciu jednostek, strona wewnętrzna
- 10.6 $\frac{1}{6}$ bryły złożona z pięciu jednostek, strona zewnętrzna
- 10.7 $\frac{1}{3}$ bryły złożona z dwóch szóstych części, strona wewnętrzna
- 10.8 $\frac{1}{2}$ bryły złożona z trzech szóstych części, strona wewnętrzna
- 10.9 Dwie jednostki złączone rombowa podstawą, ośmiościan nieforemny
- 11.1 Monolit $\mathbb{D}/\mathbb{I}$
- 11.2 Podział ortogonalny na dwie, cztery i osiem części
- 11.3 Podział strukturalny, dwie różne jednostki
- 11.4 Część bryły złożona z siedmiu jednostek, strona wewnętrzna
- 11.5 Część bryły złożona z siedmiu jednostek, strona zewnętrzna
- 11.6 $\frac{1}{2}$ bryły złożona z szesnastu jednostek
- 12.1 Monolit $\mathbb{I}/\mathbb{D}$
- 12.2 Podział ortogonalny na dwie, cztery i osiem części
- 12.3 Podział strukturalny, dwie różne jednostki
- 12.4 Część bryły złożona z czterech jednostek, strona wewnętrzna
- 12.5 Część bryły złożona z czterech jednostek, strona zewnętrzna
- 12.6 $\frac{1}{4}$ bryły złożona z ośmiu jednostek, strona wewnętrzna
- 12.7 $\frac{1}{4}$ bryły złożona z ośmiu jednostek, strona zewnętrzna

Opisy fotografii dodatkowych

- 01. Wielościan wklęsło-wypukły zbudowany z czterech podwójnych jednostek strukturalnych $\mathbb{H}$ ze ściętymi narożami wewnętrznymi tworzącymi prześwit w postaci Heksaedru (pierwsza strona okładki)
- 02. Fizyczne modele szkieletów brył foremnych zestawione w dwie grupy. Krawędź $\mathbb{H}$ jest równa krawędzi $\mathbb{O}$, krawędzi $\mathbb{I}$ oraz przekątnej pięcioboku $\mathbb{D}$, a krawędź $\mathbb{T}$ jest równa przekątnej kwadratu $\mathbb{H}$ (trzecia strona okładki)

Bibliografia

- C. Van Doren *Historia wiedzy*, Koszalin 1996
- M. Heller *Bóg i geometria. Gdy przestrzeń była Bogiem*,
Copernicus Center Press, Kraków 2015
- D. Hilbert,
S. Cohn-Vossen *Geometria pogładowa*, PWN, Warszawa 1956
- M. Van Meerssche,
J. Feneau-Dupont *Krystalografia i chemia strukturalna*, PWN,
Warszawa 1984
- F. Otto, E. Otto *Podręcznik geometrii wykreslnej*, PWN,
Warszawa 1980
- Z. Pogoda *Galeria wielościanów*, WUW, Warszawa 2005
- H. Steinhaus *Kalejdoskop matematyczny*, WSiP, Warszawa 1989
- Encyklopedia szkolna. Matematyka* – WSiP,
Warszawa 1989

O autorze



Prof. Sylwester Michalczewski

Urodzony 1 stycznia 1951 roku w Kryłowie na Ziemi Zamojskiej.

Edukację rozpoczyna w Krakowie. Pięcioletnie Liceum Sztuk Plastycznych kończy maturą w 1970 roku. W latach 1970–1975 studiuje na Wydziale Form Przemysłowych Akademii Sztuk Pięknych im. Jana Matejki w Krakowie. Bezpośrednio po obronie pracy magisterskiej zostaje zatrudniony jako asystent w Katedrze Metodyki Projektowania. Pracę doktorską broni w 1984 roku, a habilitacyjną w 1994 roku. Od 1999 roku zatrudniony na stanowisku profesora ASP.

W latach 1994–2000 współorganizator i pierwszy kierownik nowej jednostki miedzykatedralnej pod nazwą Warsztaty Badawczo-Projektowe WFP.

Od 2004 roku kierownik Pracowni Projektowania Modelowego w Katedrze Podstaw Projektowania.

Członek zwyczajny ZPAP, członek założyciel Fundacji Rzecz Piękna, członek Stowarzyszenia Kultury Chrześcijańskiej im. Ks. Piotra Skargi. W latach 2002–2010 zatrudniony na ½ etatu na stanowisku profesora nadzwyczajnego w Wyższej Szkole Handlowej im. Bolesława Markowskiego

w Kielcach na kierunku wzornictwo. W latach 2012–2020 zatrudniony na stanowisku profesora nadzwyczajnego w Instytucie Sztuki w Państwowej Wyższej Szkole Zawodowej w Tarnowie.

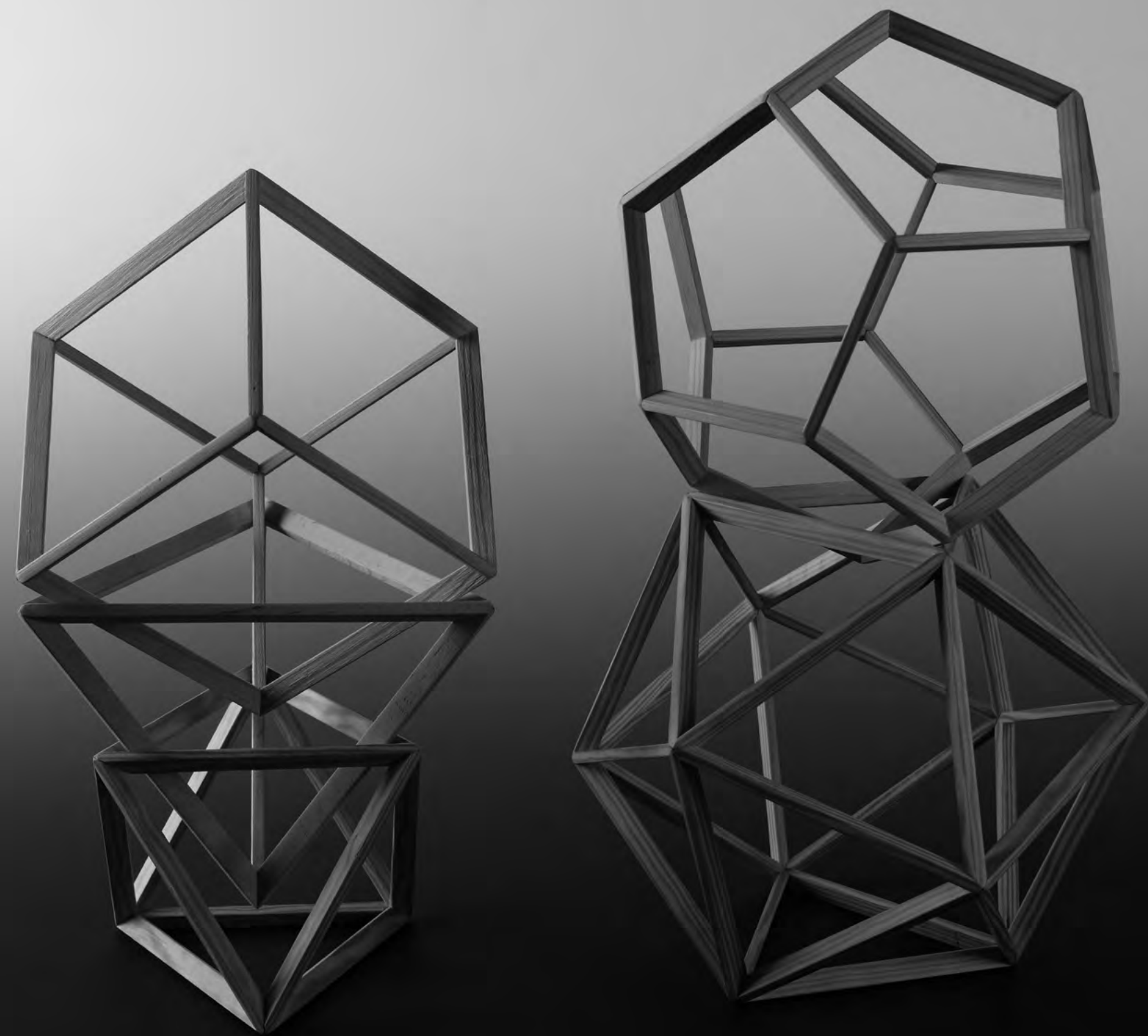
Zajmuje się teorią i praktyką wzornictwa przemysłowego:

- projektowaniem produktu (liczne wdrożenia i zastrzeżenia wzorów użytkowych, nagrody)
- projektowaniem komunikacji wizualnej (koncepcja nowego systemu pisma, znaki graficzne, plakaty)
- działalnością plastyczną, rysunkiem oraz rzeźbą z kamieni znalezionych.

Od 2012 roku zajmuje się badaniem natury brył platońskich i archimedesowych, ich wzajemnymi powiązaniem, możliwościami przekształceń, poszukiwaniem sposobów realizacji monolitów brył i ich podziałem na równe części.

Owocem tych badań jest niniejsza publikacja.

Fot. 02. Fizyczne modele szkieletów brył foremnych zestawione w dwie grupy. Krawędź H jest równa krawędzi O, krawędzi I oraz przekątnej pięcioboku D, a krawędź T jest równa przekątnej kwadratu H.



Sylwester Michalczewski
Studium brył foremnych i pochodnych

recenzent: prof. Robert Wolak
korekta: Anna Myczkowska-Szczerska, Michał Pilikowski
projekt graficzny i skład: Anna Szwaja
fotografie brył: Piotr Witosławski
rysunki: Sylwester Michalczewski
nakład 500 egzemplarzy
druk i oprawa: Drukarnia Skleniarz

wydawca:
Wydawnictwo Akademii Sztuk Pięknych
im. Jana Matejki w Krakowie
pl. Jana Nowaka-Jeziorańskiego 3
31-154 Kraków
tel. 12 299 20 61
wydawnictwo@asp.krakow.pl
www.wydawnictwo.asp.krakow.pl

© Copyright by Akademia Sztuk Pięknych
im. Jana Matejki w Krakowie, 2021

ISBN — 978-83-66564-31-2

Zrealizowano w ramach działalności statutowej
Katedry Podstaw Projektowania Wydziału Form Przemysłowych
Akademii Sztuk Pięknych im. Jana Matejki w Krakowie –
zadanie nr 34